حل نموذج بجروت

(806)-581

موعد شتاء 2023

طاقم الرياضيات

معهد IQ

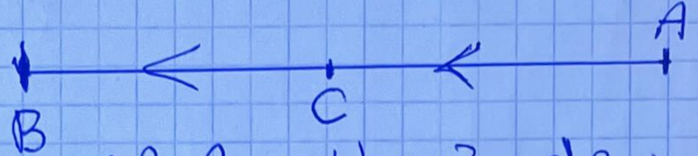
مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

سؤال 1

نحسب المعطيات

أ



في النهر يوجد 3 محطات A, B, C
بحيث المحطة C تقع بين A و B.
التيار في النهر يتحرك من المحطة A باتجاه B.

معطى أن سرعة التيار X
نفرض سرعة القارب I في المياه الساكنة V_I
ونفرض سرعة القارب II في المياه الساكنة V_{II}

* معطى أن سرعة القارب I عندما أبحر مع اتجاه التيار كانت ضعف سرعته عندما أبحر ضد إتجاه التيار
ولذلك يتحقق:

$$\underbrace{V_I + X}_{\text{سرعته مع اتجاه التيار}} = 2\underbrace{(V_I - X)}_{\text{سرعته بعكس اتجاه التيار}}$$

$$V_I + X = 2V_I - 2X \Rightarrow 2X + X = 2V_I - V_I$$

$\boxed{3X = V_I}$ سرعة القارب I بدلالة سرعة التيار

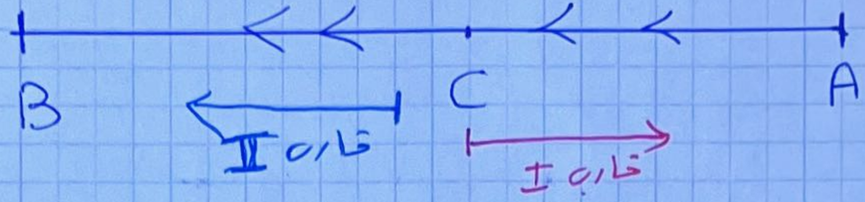
** كذلك معطى أن سرعة القارب II عندما أبحر مع اتجاه التيار كانت 6.5 ضعف سرعة القارب I عندما أبحر بعكس اتجاه التيار، لذلك يتحقق:

$$V_{II} + X = 6.5\cdot(V_I - X) \Rightarrow V_{II} + X = 6.5V_I - 6.5X$$

$$\Rightarrow V_{II} = 6.5\overset{3X}{V_I} - 6.5X - X \rightarrow V_{II} = 6.5(3X) - 6.5X - X$$

$\boxed{V_{II} = 12X}$ سرعة القارب II بدلالة سرعة التيار

ب



تلخيص المعطيات:

القارب I انطلق من C باتجاه A اي ضد اتجاه التيار

وبالتالي سرعة تحركه هي $3X-X \rightarrow 2X$

وصل الى A بعد ساعتين لذلك المسافة بين A و C

هي $2\cdot 2X = 4X$

$\boxed{\text{المسافة } A \rightarrow C : 4X}$

القارب II انطلق من C باتجاه B ووصل بعد 7 ساعات

سرعة القارب II مع اتجاه التيار هي $12X+X \rightarrow 13X$

وبالتالي المسافة بين B و C هي $13X\cdot 7 = 91X$ كم

والمسافة الكلية بين A و B هي $91X+4X = 95X$.

$\boxed{\text{المسافة من } B \rightarrow C \;\; 91X}$

$\boxed{\text{المسافة من } A \rightarrow B \;\; 95X}$

بعد أن وصل القارب I الى A استدار وعاد الى B.

وعند وصول القارب II الى B كان القارب A

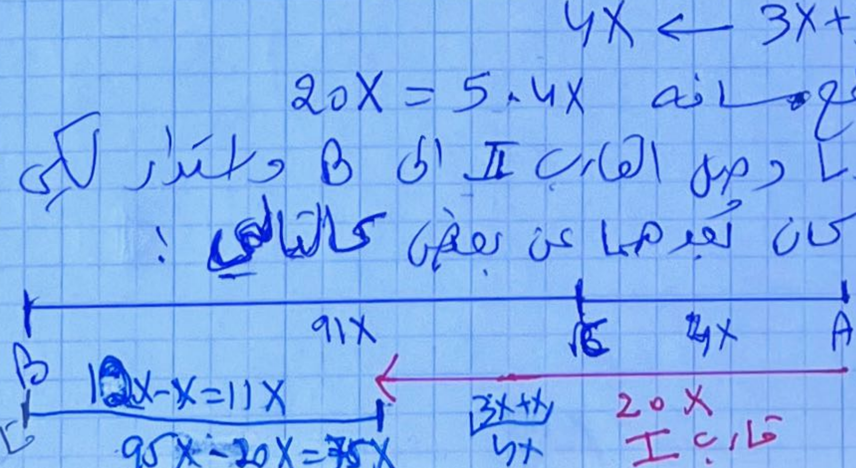
قد سار $(7-2) \rightarrow 5$ ساعات من A باتجاه B

سرعته $3X+X \rightarrow 4X$

وبالتالي قطع مسافة $5\cdot 4X = 20X$

وبالتالي عندما وصل القارب II الى B واستدار لكي يعود

باتجاه A كان بعدهما عن بعض كالتالي:



إذاً

عندما وصل القارب II الى B بعد 7 ساعات من الانطلاق

أي في الساعة $16:30 = 7 + 9:30$

كانت المسافة بينهما $75x$

سرعة القارب I : $x + 3x \rightarrow 4x$ (مع اتجاه التيار)

سرعة القارب II : $12x - x \rightarrow 11x$ (ضد اتجاه التيار)

المسافة بينهما كانت $95x - 20x = 75x$

نفرض أن الزمن الذي أنجزه القاربان هو t

إذاً يتحقق:

$$(4x + 11x) \cdot t = 75x$$

$$15x\,t = 75x \rightarrow t = \frac{75x}{15x} = 5$$

اي بعد 5 ساعات من انطلاق القارب II من B

باتجاه A التقيا وكان ذلك الساعة

$$16:30 + 5 = \boxed{21:30}$$

ب.(2)

واضح انهما التقيا في نقطة بين B و C لأنه

عندما انطلق القارب II باتجاه A (من B)

كان القارب I قد عبر ~~النقطة~~ C.

ج.

بعد القارب II عندما التقى مع القارب I عن B كان

$$5 \cdot 11x = 55x$$

وبما ان المسافة بين B و C هي $91x$ ولذلك

بعد القارب II عن C كان:

$$91x - 55x = 36x$$

وبما ان هذا البعد هو 90 كم اذاً يتحقق

$$36x = 90 \rightarrow x = \frac{90}{36} = 2.5$$

اذاً سرعة التيار 2.5 كم/س

سؤال 2

أ. بحسب المعطيات A متوالية هندسية لا نهائية.

حدها العام a_n وأساسها q

اي يتحقق $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (a_1 الحد الأول).

المتوالية B حدها العام: $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$

$b_{n+1} = a_{n+1} \cdot q^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot q^n}{a_n \cdot q^{n-1}} = \overset{q}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \cdot \overset{q}{\frac{q^n}{q^{n-1}}} = q^2$$

اذًا المتوالية B هندسية حدها الأول هو

$b_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$

وأساسها q^2

وهو المطلوب

ب(1) اذا كانت المتوالية A ليست متقاربة

اذًا $1 < |q|$ وبالتالي $1 < q^2$ بالضرورة

وهذا معناه ان المتوالية B ليست متقاربة بالضرورة.

(2) اذا كانت A متوالية تنازلية وكان a_1 سالب

اذًا عندها يجب ان يكون $1 < q$ لكي تكون تنازلية

وعندها $1 < q^2$ وبالتالي المتوالية B ليست متقاربة

اي ان الادعاء خطأ

$\boxed{\text{اذًا للإجمال: ادعاء (1) صحيح // ادعاء (2) خطأ}}$

ج. معطى أن المتواليتين متقاربتين أي أن $|q| < 1$

ويتحقق $\frac{S_B}{S_A} = \frac{\frac{b_1}{1-q^2}}{\frac{a_1}{1-q}} = \frac{4}{7}$

$$\Rightarrow \frac{S_B}{S_A} = \frac{\frac{b_1}{1-q^2}}{\frac{a_1}{1-q}} = \frac{\frac{a_1}{1-q^2}}{\frac{a_1}{1-q}} = \frac{\cancel{a_1}}{1-q^2} \cdot \frac{1-q}{\cancel{a_1}} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{1-q}{1-q^2} = \frac{4}{7} \longrightarrow \frac{\cancel{1-q}}{(1+q)\cancel{(1-q)}} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{4}{7}$$

$$4+4q = 7 \longrightarrow 4q = 7-4 \Longrightarrow 4q = 3$$

$$\boxed{q = \frac{3}{4}}$$

ف. بحسب المعطى:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} - - - + \frac{b_n}{a_n} = \frac{3367}{1024}$$

بما أن $b_n = a_n q^{n-1}$ إذاً $\frac{b_n}{a_n} = q^{n-1}$

$\frac{b_2}{a_2} = q \,//\, \frac{b_3}{a_3} = q^2 \cdots$

وكذلك $\frac{b_1}{a_1} = 1$

وبالتالي المتوالية:

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} - - - \frac{b_n}{a_n}$$

عبارة عن المتوالية التالية:

$$C: \overset{q^0}{1}, q, q^2 - - - q^{n-1}$$

وهذه المتوالية هي متوالية هندسية حدها الاول 1

وأساسها $q = \frac{3}{4}$ وبالتالي مجموعها

$$S_{C_n} = \frac{1 \cdot [(0.75)^n - 1]}{0.75 - 1} = \frac{(0.75)^n - 1}{-0.25} = \frac{3367}{1024} \quad / \cdot -0.25$$

$$(0.75)^n - 1 = \frac{3367}{1024} \cdot \frac{-1}{4}$$

$$(0.75)^n - 1 = \frac{-3367}{4096} \longrightarrow (0.75)^n = \frac{-3367}{4096} + 1$$

$$(0.75)^n = \frac{729}{4096} \Longleftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{729}{4096} \Rightarrow \boxed{n=6}$$

$$* \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096}$$

سؤال 3

يحسب المعطيات:

في الصندوق (أ) يوجد a ثمار

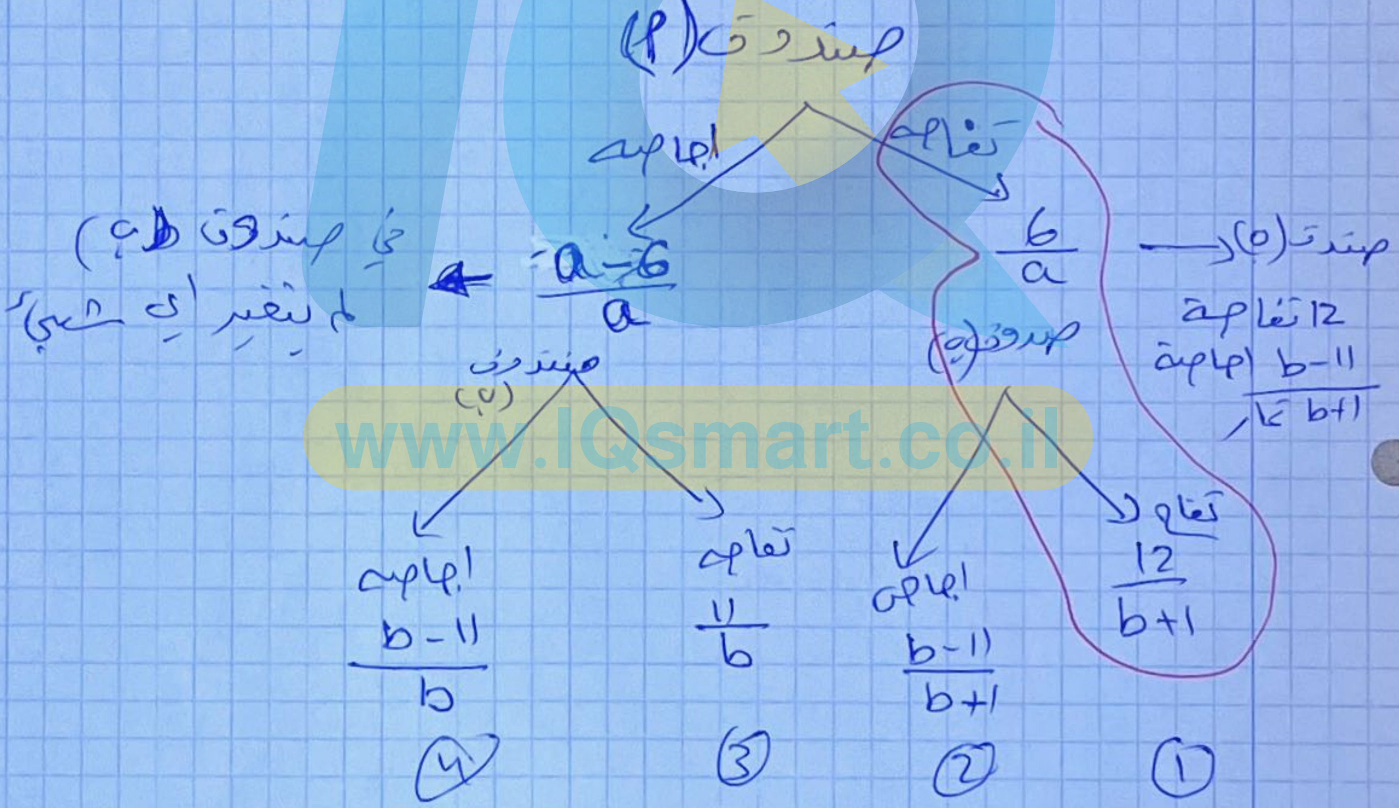
6 تفاحات

الباقي اجاص (a-6)

في الصندوق (ب) يوجد b ثمار

11 تفاحة

b-11 اجاصات



احتمال إخراج تفاحتان فقط (التفرع ①)

$$P(\text{تفاحتان}) = \frac{6}{a}\cdot\frac{12}{b+1} = \frac{72}{a(b+1)}$$

ب - نحسب المعطى: الاحتمال لاخراج تفاحتان بالطريقة الموصوفة هو $\frac{9}{65}$ اي يتحقق ان:

$$\frac{72}{a(b+1)}=\frac{9}{65}$$

كذلك معطى أن:

الاحتمال لاخراج تفاحه وبعد ذلك اجاصه حسب الطريقة الموصوفة هي: $\frac{21}{130}$

أي يتحقق:- (تفرع 2 من الشجرة).

$$\frac{6}{a}\cdot\frac{b-11}{b+1}=\frac{6(b-11)}{a(b+1)}=\frac{21}{130}$$

اذاً حصلنا على معادلتين بمتغيرين:-

$$\text{I}\quad \frac{72}{a(b+1)}=\frac{9}{65}\Rightarrow 9a(b+1)=\overset{4680}{65\cdot 72}$$

$$a(b+1)=\frac{4680}{9}=520$$

$$\boxed{a(b+1)=520}$$

$$\text{II}\quad \frac{6(b-11)}{\underbrace{\boxed{a(b+1)}}_{520}}=\frac{21}{130}\Rightarrow 6(b-11)=\frac{21\cdot 52\cancel{0}}{13\cancel{0}}$$

$$6(b-11)=84\rightarrow b-11=14\rightarrow \boxed{b=25}$$

نعوض ونجد a:

$$a(b+1)=520$$

$$a\cdot(25+1)=520\rightarrow a=\frac{520}{26}=20$$

اذاً $\boxed{a=20}$ $\boxed{b=25}$

ج.

$$P\left(\begin{array}{c}\text{اخراج}\\ \text{اجاصة}\\ \text{من (ب)}\end{array} \middle| \begin{array}{c}\text{اخراج}\\ \text{تفاحة}\\ \text{من (أ)}\end{array}\right) = \frac{P\left(\begin{array}{c}\text{اخراج}\\ \text{اجاصة}\\ \text{من}\\ \text{(ب)}\end{array} \cap \begin{array}{c}\text{اخراج}\\ \text{تفاحة}\\ \text{من (أ)}\end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{c}\text{اخراج تفاحة}\\ \text{من (أ)}\end{array}\right)}$$

$$= \frac{\frac{21}{13\cancel{0}}}{\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{26}}} = \frac{21}{13\cdot 3} = \boxed{\frac{7}{13}}$$

د. عدد الثمار في الصندوق الجديد هو 45

من (أ): 6 تفاحات و 14 اجاصة ⇐ 17 تفاحة

من (ب): 11 تفاحة و 14 اجاصة ⇐ 28 اجاصة

الاحتمال لاخراج 4 تفاحات (مع اعادة) هو

$$\binom{6}{4}\left(\frac{17}{45}\right)^4\left(\frac{28}{45}\right)^2 = 0.118$$

الاحتمال لاخراج 6 اجاصات هو

$$\left(\frac{28}{45}\right)^6 = 0.058$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{4 تفاحات}\\ \text{بالضبط}\\ \text{او 6 اجاصات}\end{array}\right) = 0.117 + 0.058 = \boxed{0.176}$$

هـ. الاحتمال المطلوب:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{4 تفاحات}\\ \text{على}\\ \text{التوالي}\end{array} \middle| \begin{array}{c}\text{اخراج}\\ \text{4 تفاحات}\end{array}\right) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\binom{6}{4} = 15$$

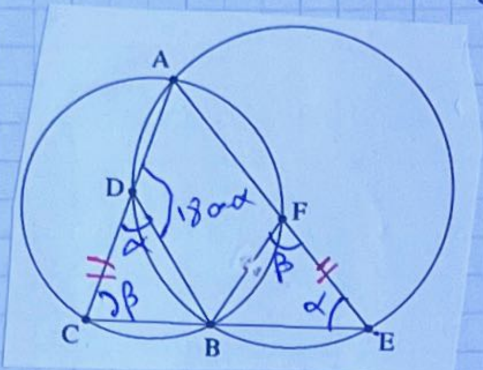
اي 15 امكانية لاخراج 4 تفاحات

ترتيب اخراج التفاحات متتالي له 3 امكانيات

1,2,3,4
2,3,4,5
3,4,5,6

3 امكانيات

سؤال 4



أ. $\measuredangle ACB = \measuredangle BCD = \beta$ مشتركة للمثلثين.

$ADBE$ شكل رباعي محصور
داخل الدائرة اليمنى

لذلك:

(*) $\measuredangle ADB + \measuredangle AEB = 180°$ مجموع
كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي
محصور داخل دائرة $180°$

(**) $\measuredangle ADB + BDC = 180°$ (زاوية مستقيمة $\measuredangle ADC$)

من (*) و (**) نستنتج أنّ:

$\measuredangle BDC = \measuredangle AEB = \alpha$

اذا يتشابه المثلثان $\triangle BCD \sim \triangle ACE$

وهو المطلوب (أ)

ب. $BC = FE$ (معطى)

من البند السابق $\measuredangle BDC = \measuredangle AEB = \alpha$

(1) $\measuredangle ACB + \measuredangle BFA = 180°$ زاويتان متقابلتان في الشكل الرباعي
$ACBF$ المحصور في الدائرة اليسرى

(2) $\measuredangle BFA + \measuredangle BFE = 180$ زاوية مستقيمة $\measuredangle AFE$

من دمج (1) و (2) نحصل على:

$\measuredangle ACB = \measuredangle BFE = \beta$

اذا $\triangle BFE \cong \triangle BCD$ حسب (ز. ض. ز)

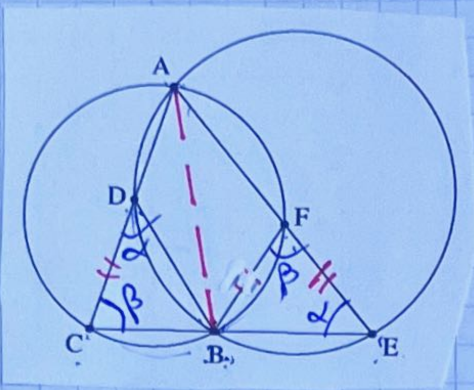
$\measuredangle FEB = \measuredangle CDB = \alpha$

$BC = FE$

$\measuredangle EFB = \measuredangle EFB = \beta$

وهو المطلوب (ب)

(P.)



(1) من النتائج في البند السابق ينتج أن

$BC = BF$
$BD = BE$ (3)

من التشابه في (P) $\Delta BCD \sim \Delta ACE$ ونسبة التشابه تتحقق:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} = \frac{AE}{BD}$$

ضرب تبادلي

$\Longrightarrow AC \cdot BD = AE \cdot BC$

وبما أن $BD = BE$ من (3)

نعوض ونحصل على

$\boxed{AC \cdot BE = AE \cdot BC}$ (4)

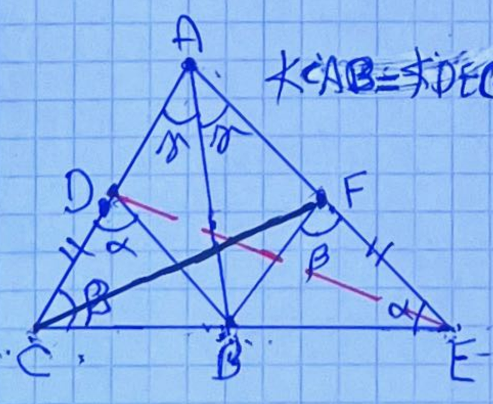
$\boxed{\text{وهو المطلوب } P. (1)}$

$\boxed{2.P}$

من $AC \cdot BE = AE \cdot BC$ (4) $\Longleftarrow$ نستنتج ان $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$

وبالتالي بحسب النظرية العكسية لمنصف الزاوية في ΔABC
ينتج ان AB منصف $\angle CAE$

(د) بحسب البند السابق AB منصف زاوية ولذلك $\angle BAC = \angle BAE$



$\Leftarrow \angle CAB = \angle DEC$

نفس الزاوية $\angle DEC = \angle DEB$ تقابل الوتر BD
نفس الزاوية $\angle CAB = \angle DAB$ تقابل الوتر BD
$\angle FCB = \angle BAF = \gamma$ تقابلان للوتر BF
(D) (E)

بما أن $\gamma = \angle CAB = \angle BAE$
أذاً $\angle CAB = \angle FCE = \gamma$

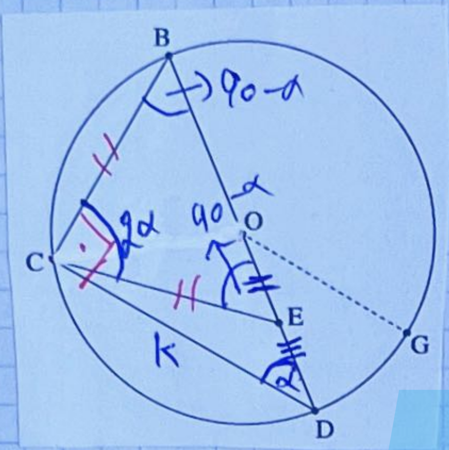
وهو المطلوب (د)

سؤال 5

أ. في ΔBCD, $\sphericalangle C=90°$, لأنها محيطية مقابلة للقطر BD

$CD=K, \quad BD=2R$

لذلك $\boxed{\cos\alpha=\frac{K}{2R}}$



ب. $OE=ED=\frac{R}{2}$ $(OD=R)$

في ΔCDE بحسب قانون $\cos$ يتحقق:

$$CE^2=ED^2+CD^2-2ED\cdot CD\cdot\cos\alpha$$

$$CE^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+K^2-2\frac{R}{2}\cdot K\cdot\boxed{\frac{K}{2R}}$$

$$CE^2=\frac{R^2}{4}+K^2-\frac{K^2}{2}=\frac{R^2}{4}+\frac{K^2}{2}$$

$$CE^2=\frac{R^2}{4}+\frac{2}{4}K^2=\frac{1}{4}\left(R^2+2K^2\right)$$

$$CE=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(R^2+2K^2\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2+2K^2}$$

$\boxed{CE=\frac{1}{2}\sqrt{R^2+2K^2}}$ هو المطلوب (ج)

ج. معطى أن $BC=EC$ ⇐ ΔBCE متساوي الساقين

$\sphericalangle B=90-\alpha$ لأن مجموع زوايا ΔBDC $180°$

إذًا: $\sphericalangle CEB=90-\alpha$ ⇐ $CE=BC$

وبالتالي $\sphericalangle ECB=2\alpha$

في ΔBCD ⇐ $\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$ ⇐ $BC=2R\cdot\sin\alpha$

في ΔBCE ⇐ بحسب قانون الـ $\sin$:

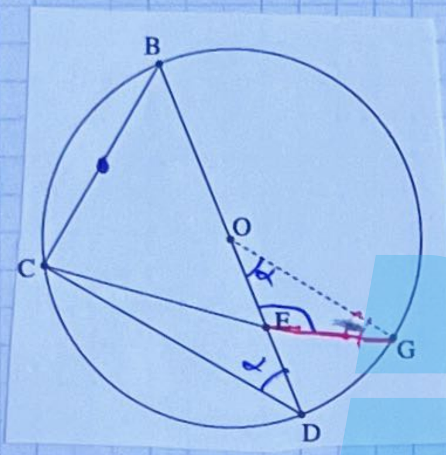
$$\frac{\overset{BO+OE}{BE}}{\sin2\alpha}=\frac{CE}{\sin(90-\alpha)}\Rightarrow\frac{1.5\cancel{R}}{\underbrace{\sin2\alpha}_{2\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}}=\frac{2\cancel{R}\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$$

$1.5=4\sin^2\alpha$

$$1.5 = 4\sin^2\alpha \Longrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1.5}{4}$$

$$\sin^2\alpha = 0.375 \Longrightarrow \sin\alpha = \sqrt{0.375} = 0.612$$

$$\boxed{\alpha = 37.761}$$



$\angle DOG = \alpha \Longleftarrow OG \parallel CD$.ד

بالتبادل

في ΔOGE يتحقق:

$$EG^2 = OE^2 + OG^2 - 2OE\cdot OG\cdot\cos\alpha$$

$$EG^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2 - 2\cdot\frac{R}{2}\cdot R\cdot\cos\underbrace{\alpha}_{37.761}$$

$$EG^2 = \frac{R^2}{4} + R^2 - 0.79R^2$$

$$EG^2 = 0.46R^2$$

$$\boxed{EG = 0.678R}$$

في ΔOGE يتحقق:

$$\frac{EG}{\sin\alpha} = \frac{OG}{\sin\angle E}$$

$\angle E =$

$$\frac{0.678\cancel{R}}{\sin(37.761)} = \frac{\cancel{R}}{\sin\angle E}$$

$$\sin(\angle E) = 0.903$$

$$\boxed{\angle E = 64.58}$$

$$\angle E = 180 - 64.58$$

$$\boxed{\angle E = 115.38}$$

لأن $\alpha < 90$

لذا $\angle E > 90 \Longrightarrow \boxed{\angle E = 115.38}$

سؤال 6

$$f(x)=x^n(x+1)^2 \qquad n>1$$

أ تقاطع مع X $\quad y=0$

$$0=x^n(x+1)^2$$

$x^n=0 \qquad x+1=0$

$\boxed{x=0} \qquad \boxed{x=-1}$

نقاط التقاطع مع المحاور $\quad (-1,0) \quad (0,0)$

ب: اذا كان n زوجي اذاً x^n موجب لكل $x\neq 0$

و $(x+1)^2$ موجب لكل $x\neq -1$

وبالتالي في حالة n زوجي اذاً :-

المجال الموجب للدالة هو: $x\neq 0$ او $x\neq -1$

المجال السالب: ϕ

اذا n فردي، اذاً x^n سالب لكل $x<0$

وموجب لكل $x>0$

و $(x+1)^2$ موجب لكل $x\neq -1$

وبالتالي في حال n فردي :-

المجال الموجب هو $x>0$

المجال السالب: $x\neq -1,\ x<0$

ج. $f'(x)=nx^{n-1}(x+1)^2+2(x+1)\cdot x^n$

$$\Longrightarrow f'(x)=x^{n-1}(x+1)[n(x+1)+2x]$$

$$f'(x)=x^{n-1}(x+1)[nx+n+2x]=x^{n-1}\cdot(x+1)[x(n+2)+n]$$

$$f'(x)=x^{n-1}\cdot(x+1)[(n+2)\cdot x+n]$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^{n-1}\cdot(x+1)\left[(n+2)\cdot x+n\right]=0$$

$\boxed{x=0}$ $\quad$ $\boxed{x=-1}$ $\quad$ $x(n+2)-n=0$

$$\boxed{x=\frac{-n}{n+2}}$$

بحسب البنود السابقة: $(-1,0)$ و $(0,0)$ نقاط حرجة

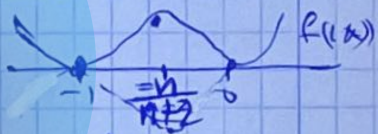
والنقطة $-\frac{n}{n+2}$ هو سالب لان n طبيعي.

ولذلك:

في حال n زوجي ان $f(x)$ موجبة لكل $x\neq0$
$x\neq-1$

ولذلك النقاط $(0,0)$ $(-1,0)$ مينيمام

والنقطة $x=\frac{-n}{n+2}$ مكسيمم.

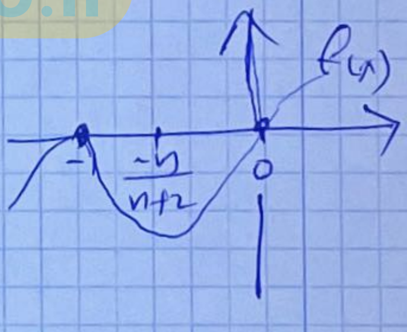


* انتبه $-1 < x=\frac{-n}{n+2} < 0$

في حال n فردي: الـ $f(x)$ سالبة في المجال لـ $x<0$
$x\neq-1$

وبالتالي: $x=-1$ مكسيمم $(-1,0)$

$x=\frac{-n}{n+2}$ مينيمام



$x=0$ التواء لان الدالة في $x>0$ موجبة
اي ليست نقطة نهاية قصوى

* بحسب التحليل والشرح للبنود السابقة

الرسم II ملائم لـ n فردي

الرسم I ملائم لـ n زوجي

هـ. $g(x) = k \cdot f(x-6)$

الدالة $f(x-6)$ هي ازاحة للدالة $f(x)$ بشكل افقي بمقدار 6 وحدات (على المحور x) وبالتالي الازاحة الافقية لا تغير المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة مع المحور x انما تتغير فقط اطراف المجال المحصور بين الدالة والمحور x.

وبالتالي اذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور x هي m اذا المساحة المحصورة بين الدالة $f(x-6)$ والمحور x هي m

وبالتالي يتحقق:

(المساحة بين الدالة g والمحور x) $= k \cdot$ (المساحة بين الدالة f والمحور x)

$A = k \cdot$ (المساحة بين f والمحور x)

$$\boxed{\frac{A}{k} = \text{المساحة بين الدالة } f \text{ والمحور } x}$$

سؤال 7

$$f(x)=\frac{4\sin x}{\cos^2 x-1} \qquad -2\pi \le x \le 2\pi$$

أ.1 مجال تعريف الدالة

$$f(x)=\frac{4\sin x}{\cos^2 x-1} \Longrightarrow \cos^2 x-1\neq 0$$

$$\cos^2 x \neq 1$$

$\cos x \neq 1$; $\cos x \neq -1$

$x \neq 0, -2\pi, 2\pi$; $x = -\pi \;//\; \pi$

اذاً مجال تعريف الدالة: بالمجال: $-2\pi \le x \le 2\pi$

$x \neq -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

أ.2

لايجاد خطوط التقارب يجب ان نفحص هل النقاط التي فيها الدالة غير معرفة تصفّر البسط والمقام ام لا.
النقاط التي فيها الدالة غير معرفة تصفر البسط ايضًا
لان $\sin(2\pi)=0$, $\sin(-2\pi)=0$ ......
ولذلك نفحص هل هي ثقب ام لا

$$f(x)=\frac{4\sin x}{\cos^2 x-1}=\frac{4\sin}{-\sin^2 x}=\frac{4}{-\sin x}=\frac{-4}{\sin x}$$

$$\boxed{\cos^2 x-1=-\sin^2 x}$$

تحت شروط مجال تعريف الدالة

$$f(x)=\frac{-4}{\sin x}$$

ومعادلة $\sin x=0$ في كل واحدة من النقاط التي فيها الدالة غير معرفة (قبل التبسيط)
لذلك نتحقق في كل نقطة غير معرفة $f(x)=\frac{-4}{0}$
اي ان الدالة لا تقترب من قيمة عددية ولذلك كل النقاط ليست ثقب.

اذاً خطوط التقارب $x=-2\pi \,/\, x=-\pi \,/\, x=0$
$x=\pi \,/\, x=2\pi$

3.أ

$f(x)=\frac{-4}{\sin x}$, $f(-x)=\frac{-4}{\sin(-x)}=\frac{-4}{-\sin x}$

$-f(x)=\frac{4}{\sin x}$, $f(-x)=\frac{4}{\sin x}=-f(x)$

أي أن $f(-x)=-f(x)$

والدالة فردية.

ب.1

$f'(x)=\frac{0\cdot\sin x-(-4)\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)=\frac{4\cos x}{\sin^2 x}=0$

$4\cos x=0 \longrightarrow \cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

في المجال $0\le x\le 2\pi$: $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$

غير موجود

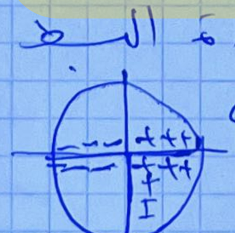
x	0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	2π
$f'(x)$	$\}$	$+$	0	$-$	$\}$	$-$	0	$+$	$\}$
$f(x)$	$\}$	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$	$\}$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$	$\}$

بما أن المقام في المشتقة دائماً موجب لذلك

إشارة المشتقة تتحدد حسب إشارة البسط $4\cos x$

ومن دائرة الوحدة فإن $\cos x$

ولذلك نقول الجدول الإشارة التالي



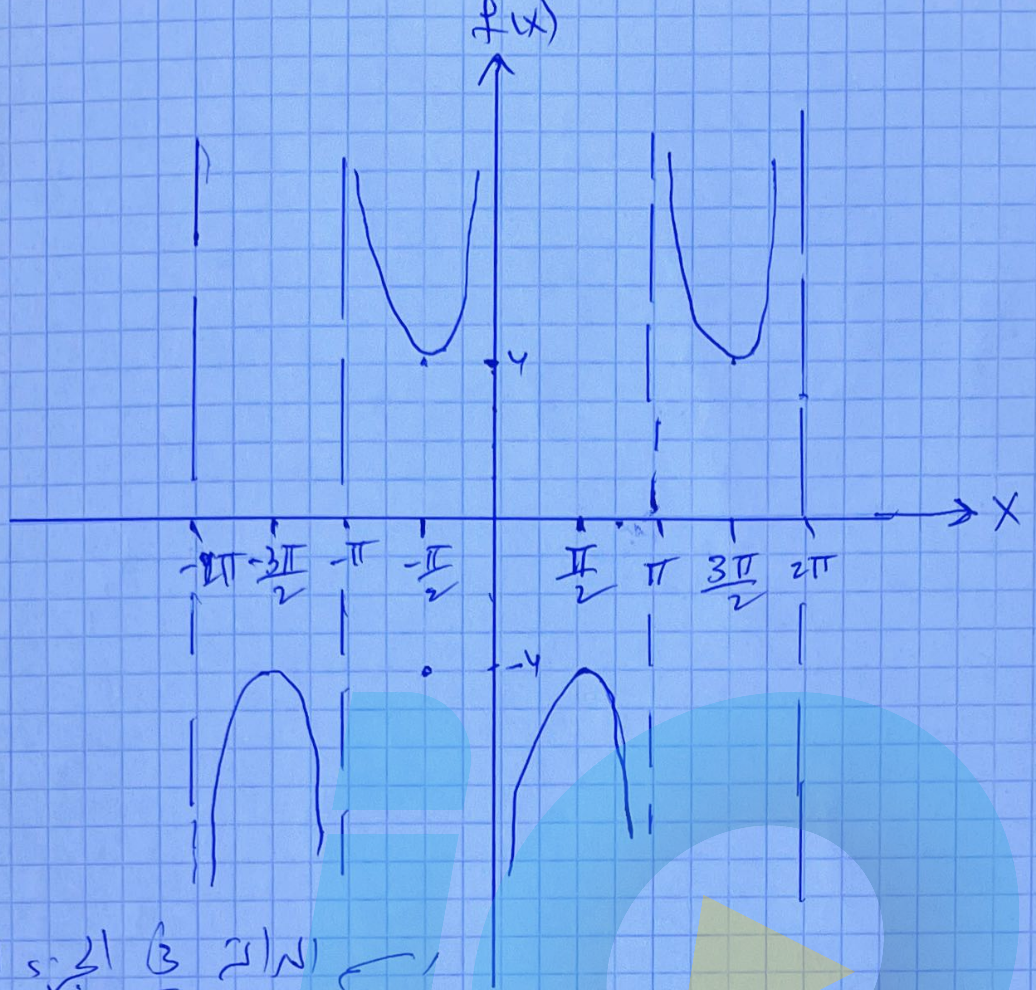
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-4}{\sin\frac{\pi}{2}}=-4$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{-4}{\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1}}=4$

$\left(\frac{\pi}{2},-4\right)$ max

$\left(\frac{3\pi}{2},4\right)$ min

ج.



رسم الدالة في الجزء السالب
من محور X هو عكس العلامة
في الدالة الفردية بين
$f(-x)$ و $f(x)$

د. $f'(x) = \frac{-4\cos x}{\sin^2 x}$

$$f''(x) = \frac{-4\sin x \cdot \sin^2 x - 4\cos x \cdot 2\sin x \cdot \cos x}{(\sin^2 x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4\sin^3 x - 8\cos^2 x \cdot \sin}{(\sin^4 x)} = \frac{-4\sin x(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

$$f''(x) = \frac{-4\sin x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \cos^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{-4\cancel{\sin x}(1+\cos^2 x)}{\sin^{\cancel{4}} x}$$

$$f''(x) = \frac{-4(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x} \Longrightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 1+\cos^2 x \stackrel{?}{=} 0$$

$$1+\cos^2 x > 0$$
دائما

لذلك ← لا يوجد نقاط الالتواء للدالة

هـ.

في المجال $1.9 \le X < 2.2$ وهذا المجال بالراديان هو

$$\frac{1.9}{3.14}\pi < X < \frac{2.2}{3.14}\pi \Longrightarrow 0.6\pi \le X \le 0.7\pi$$

ومشتقة $f(x)$ في المجال $\frac{\pi}{2} < X < \pi$ سالبة لذلك المساحة هي

$$\int_{0.6\pi}^{0.7\pi} |f'(x)|\,dx = \Big[|f(x)|\Big]_{0.6\pi}^{0.7\pi}$$

$$= |f(0.7\pi) - f(0.6\pi)| =$$

$$\left|\frac{-4}{\sin(0.7\pi)} - \frac{-4}{\sin(0.6\pi)}\right| = \boxed{0.72}$$

سؤال 8

أ.

$$g(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$$

$\downarrow$

خط أفقي $y=1$

عمودي

$x=0$

$x=-2$

$$h(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$$

$\downarrow$

$$h(x)=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)}$$

$$h(x)=\frac{(x-1)}{(x+2)}$$

$x=-1$ نقب

$h(-1)=\frac{-2}{1}=-2$

نقب $(-1,-2)$

$x=-2$ عمودي

$y=1$ أفقي

$$K(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}$$

$\downarrow$

$$K(x)=\frac{x^2}{x+2}$$

$x=0 \rightarrow K(0)=0$

نقب $(0,0)$

خط عمودي $x=-2$

خط أفقي لا يوجد

إذاً الدالة التي لها خط أفقي واحد وخط عمودي واحد هي الدالة $h(x)$

$\boxed{ب.1}$

بحسب الشرح في البند (أ)

$$h(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x-1)}{(x+2)}$$

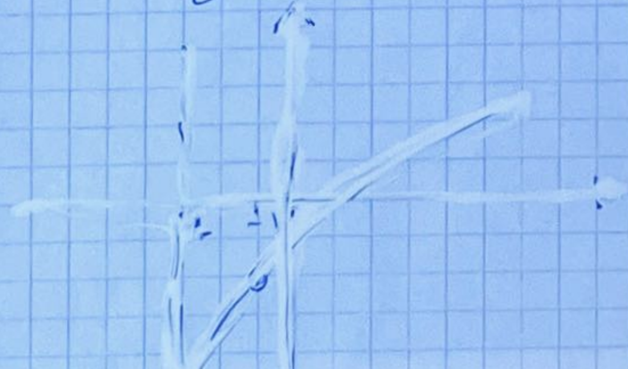
$x=-2$ خط تقارب عمودي // $y=1$ خط تقارب أفقي

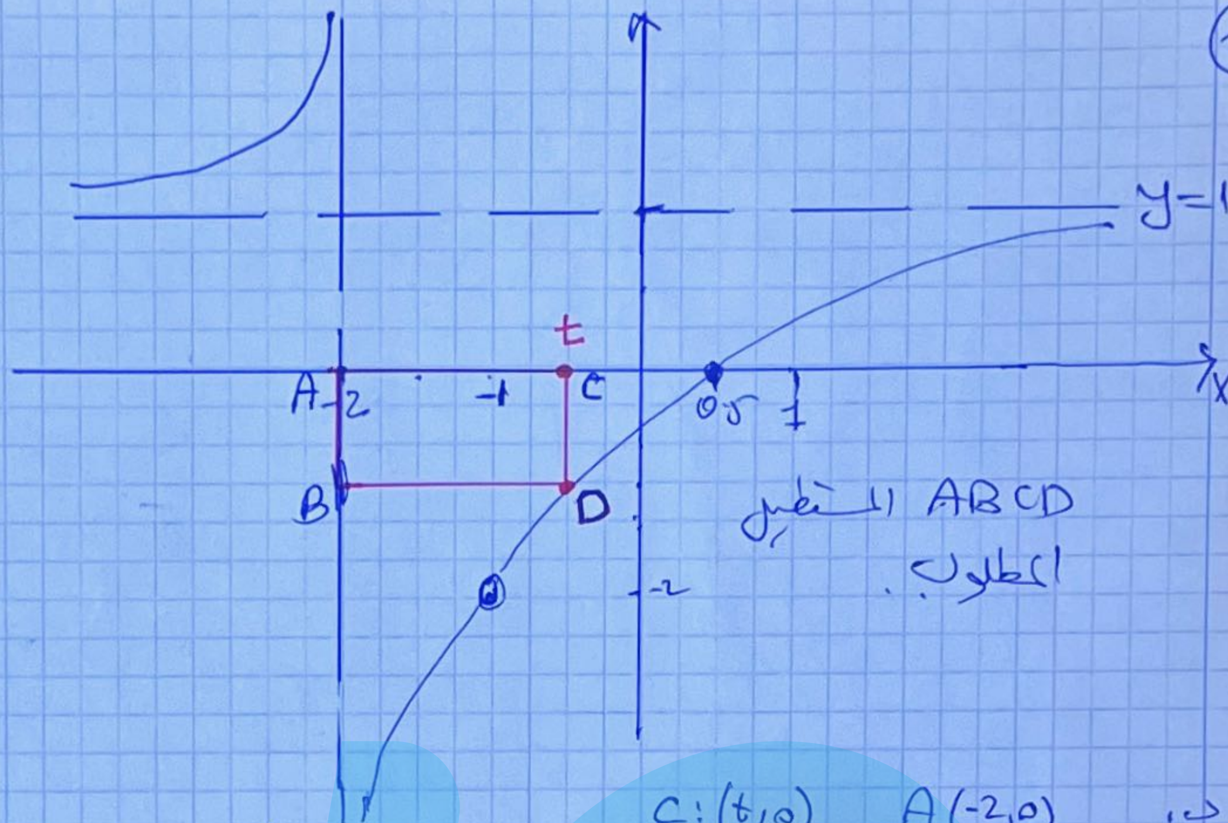
نقب $(-1,-2)$.

$\boxed{ب.2}$

تقاطع مع x $\leftarrow y=0 \leftarrow x-1=0 \leftarrow x=1 \leftarrow (1,0)$

تقاطع مع y $\leftarrow x=0 \leftarrow h(0)=-\frac{1}{2} \leftarrow (0,-\frac{1}{2})$





ب: $A(-2,0)$ $C:(t,0)$

$B:\left(-2,\frac{t-1}{t+2}\right)$ $D\left(t,\frac{t-1}{t+2}\right)$ $\Longleftarrow$ $f(t)$ دالة تعبر عن محيط المستطيل ABDC

$$f(t)=2AC+2DC$$

$$AC=t-(-2)=t+2$$

$$DC=y_C-y_D=0-\frac{(t-1)}{t+2}=\frac{1-t}{t+2}$$

$$f(t)=2(t+2)+\frac{2(1-t)}{t+2}=2t+4+\frac{2-2t}{t+2}$$

$$f'(t)=2+\frac{-2(t+2)-1(2-2t)}{(t+2)^2}=2+\frac{-2t-4+2t-2}{(t+2)^2}$$

$$f'(t)=2+\frac{-6}{(t+2)^2}=0\Longrightarrow 2=\frac{6}{(t+2)^2}\Longrightarrow \cancel{2}(t+2)^2=\cancel{6}\,3$$

$$t^2+4t+4=3\Longrightarrow t^2+4t+1=0$$

نحل المعادلة التربيعية الناتجة ونحصل على حلين

$\boxed{t_1=-2+\sqrt{3}}$ $t_2=-2-\sqrt{3}<-1$ نلغيه $(t>-1)$

$$f''(t)=0+\frac{0(t+2)^2-(-6)(2t+4)}{(t+2)^4}=\frac{6\cdot2\cancel{(t+2)}}{(t+2)^{\cancel{2}}}=\frac{12}{t+2}$$

$$f''(t)=\frac{12}{t+2}\longrightarrow f''(-2+\sqrt{3})=\frac{12}{-2+\sqrt{3}+2}=\frac{12}{\sqrt{3}}>0$$

إذاً: $t=-2+\sqrt{3}$ يعطينا أصغر محيط للمستطيل