حل نموذج بجروت

(804)-481

موعد صيف (أ) 2023

طاقم الرياضيات

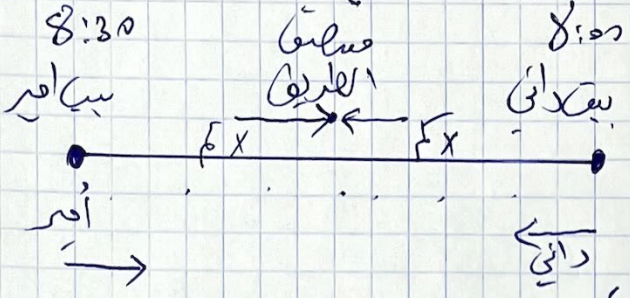
معهد IQ

www.IQsmart.co.il

مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1



يوم الأحد:

أ. بحسب المعطيات:

* سرعة دائي 6 كم/س وابتدأ الساعة 8:00
** في اللقاء سار دائي مدة أطول بـ $\frac{1}{2}$ ساعة من أمير لأنه خرج قبله بـ $\frac{1}{2}$ ساعة
*** نفرض هي اللقاء (في منتصف الطريق) قطع كل منهما x كم

إذًا:

	كمية	زمن	مسافة
أمير	8	$\frac{x}{8}$	x
دائي	6	$\frac{x}{6}$	x

وبتحقق $8/\frac{x}{8} = \frac{x}{6} - \frac{1}{2}/8$

$x = \frac{4}{3}x - 4$

$4 = \frac{1}{3}x \Longrightarrow \boxed{x = 12}$

إذًا البعد بين أمير ودائي هو:

$\boxed{2x = 24}$ كم

ب. زمن أمير $= \frac{x}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$ ساعة، خرج الساعة 8:30

لذلك اللقاء كان 8:30 + 1.5 $\boxed{10:00}$

ج. يوم الاثنين سرعة أمير تنقص إلى 8 كم/س.

(بعد 20 دقيقة) يوم الاثنين V_D تنقص سرعة

زمن أمير هو $\frac{24}{8} = 3$ ساعات ← زمن دائي $3\frac{1}{3}$ ساعة

إذًا يتحقق: $24 = 3\frac{1}{3}V_D$ ← $\boxed{V_D = 7.2}$ كم/س

www.10smart.co.il

5. البعد بينهما يكون 5 كم قبل ان يلتقيا عندما يفطحان معًا حسامة $24-5=\boxed{19}$

وبالتالي يتحقق:

$$\underbrace{7.2\cdot t}_{\text{حسام وآدي}} + \underbrace{8t}_{\text{حسام آخر}} = 19$$

$$15.2t=19 \rightarrow t=\frac{19}{15.2}=1.25$$

اي بعد ساعة وربع يكون البعد بينهما 5 كم

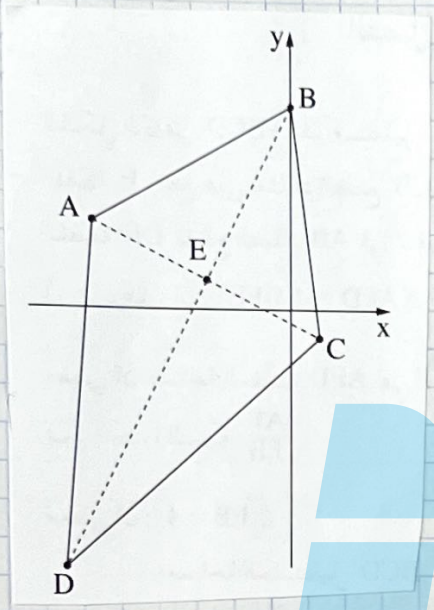
www.IQsmart.co.il

حل سؤال 2

ABCD دالتون $BA=BC \;//\; DA=DC$

E نقطة التقاء أقطاره

$C(1,-1) \quad A(-7,3)$



أ) أقطار الدالتون متعامدة I.P

أي أن ميل (AC) × ميل (BD) = -1

$$\text{ميل } AC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-(-1)}{-7-(-1)} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

إذاً ميل BD هو $\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$

$$\text{ميل } BD = m = 2$$

BD يمر بـ E نقطة تقاطع AC (وهي منتصف BD)، E

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+(-7)}{2} = -3$$

$$y_E = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$E(-3,1)$

www.IQsmart.co.il

معادلة BD: $y = mx + n$ ، $E(-3,1)$ ، $m=2$

$\Rightarrow 1 = 2(-3) + n \rightarrow 1 = -6 + n \rightarrow 7 = n$

$$BD: y = 2x + 7$$

ب) B نقطة على المحور y ومثل BD $B(0, y_B)$

$y_B = 7$ نستنتج أن BD ويحيث معادلة

$$B: (0,7)$$

بما ان المثلث قطاره متعامدة اذا مساحة المثلث

$$80 = \frac{AC \cdot BD}{2}$$ هي

نجد اطوال القطار AC ، BD :-

A(-7,3) C(1,-1)

$$AC = \sqrt{(-7-1)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{(-8)^2+4^2} = \sqrt{80}$$

$$\Rightarrow 80 = \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow 160 = \sqrt{80} \cdot BD$$

$$BD = \frac{160}{\sqrt{80}} = 2\sqrt{80} \Rightarrow \boxed{BD = 2\sqrt{80}}$$

2- نفرض D(x_D, y_D) بما ان D تقع على المستقيم BD

لذلك ينحقق $y_D = 2x_D + 7$

وبالتالي احداثيات D يمكن التعبير عنها كالتالي:

$D(x_D, 2x_D+7)$

$$BD = 2\sqrt{80} \Rightarrow \sqrt{(x_D-0)^2+(2x_D+7-7)^2} = 2\sqrt{80}$$

B(0,7)

$$BD = \sqrt{x_D^2+(2x_D)^2} = \sqrt{x_D^2+4x_D^2} = \sqrt{5x_D^2}$$

$$2\sqrt{80} = \sqrt{5x_D^2} \xrightarrow{()^2} (2\sqrt{80})^2 = (\sqrt{5x_D^2})^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 80 = 5x_D^2 \Rightarrow 320 = 5x_D^2 \Rightarrow 64 = x_D^2$$

$\boxed{8 = x_D}$ او $\boxed{-8 = x_D}$ ← نعوض بالرابع الرابع ✓

نجد y_D:

$y_D = 2x_D + 7$

$y_D = 2(-8) + 7 = -9$

$\boxed{D(-8,-9)}$

ⓐ A(-7,3) بما أن BD يحوي الدائرة التي مركزها A

واحد من القطرين تعامد أي أن PE تقطع المماس PA في E بالتالي BD هو AE ونصف قطر الدائرة:

$$AE = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \sqrt{\frac{80}{4}} = \sqrt{20}$$

$$R = AE = \sqrt{20}$$

$$\boxed{R^2 = 20}$$

مركز الدائرة A(-7,3)

أي أن معادلة الدائرة

$$(x-(-7))^2 + (y-3)^2 = 20$$

$$\boxed{(x+7)^2 + (y-3)^2 = 20}$$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 3

بحسب المعطيات نفهم النقاط التالية:

في قرية معينة في الصين:

1. كل واحد من سكان القرية اما نباتي او حضري
2. الاحتمال ان يكون احد سكان القرية نباتي اكبر بـ 0.2 من الاحتمال ان يكون حضري.

لذلك نفرض p = احتمال اختيار شخص حضري من سكان القرية. اذا احتمال اختيار شخص نباتي هو $p+0.2$

وبحقق $p+p+0.2=1 \leftarrow 2p=0.8 \leftarrow p=0.4$

اذا احتمال اختيار شخص حضري من سكان القرية 0.4

واحتمال اختيار شخص نباتي " " 0.6

3. معطى ان 80% من سكان القرية يأكلون بواسطة عيدان فقط، باقي السكان يأكلون بواسطة سكين وشوكة فقط ← 20%

4. معطى ان 25% من سكان القرية الذين يأكلون بواسطة شوكة وسكين هم نباتيون.

www.IQsmart.co.il

نبني جدول يعبر عن المعطيات

	يأكل بالعيدان	يأكل بواسطة شوكة وسكين	الاحتمال
نباتي	$0.6-0.05=0.55$	$25\% \cdot 0.2$ $0.25 \cdot 0.2 = 0.05$	0.6
حضري	$0.8-0.55=0.25$	$0.2-0.05=0.15$	0.4
الاحتمال	0.8	0.2	1

P. بحسب الجدول الاحتمال هو 0.5

ب.1 بحسب الجدول الاحتمال هو:

$0.6+0.25=0.85$

ب.2. الاحتمال هو احتمال مشروط:

$$P(\text{نباتي يأكل بالعيدان} \mid \text{نباتي أو يأكل بالعيدان}) = \frac{P(\text{نباتي يأكل بالعيدان})}{P(\text{نباتي أو يأكل بالعيدان})} = \frac{0.55}{0.85} = 0.647 = \frac{11}{17}$$

ב. נסמן ש عدد سكان القرية هو 60.

نسبة السكان النباتيين الذين يأكلون بواسطة العيدان هي 0.55

وعددهم $60 \cdot 0.55 = 33$ أشخاص

لذلك الاحتمال لاختيار الأول من سكان القرية نباتي يأكل بواسطة العيدان هو $\frac{33}{60}$

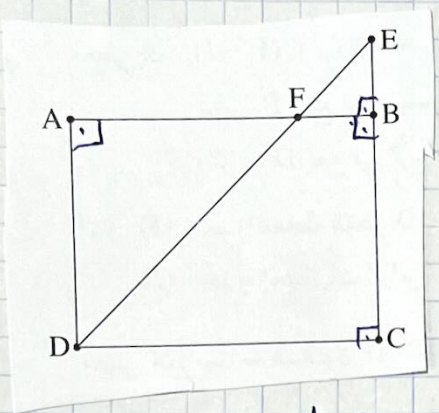
والاحتمال لاختيار الثاني هو $\frac{32}{59}$

والاحتمال الكلي هو $\frac{33}{60} \cdot \frac{32}{59} = \frac{1056}{3540}$

$= 0.298$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 4



أ. عطيت برهان أن $\triangle AFD \sim \triangle BFE$

بالزوايا متقابلة $\angle EFB = \angle AFB$

$\angle A = \angle FBE = 90°$

أيضاً يتشابه المثلثان في زوج الأضلاع

$$\frac{FD}{FE} = \frac{AD}{BE} = \frac{AF}{BF}$$ تتطابق

ب. معطى أن مساحة المثلث AFD هي 9 أمثال مساحة المثلث BFE

أي $\frac{S_{AFD}}{S_{BFE}} = 9$

النسبة بين مساحات المثلثات المتشابهة هي تربيع النسبة بين الأضلاع المتناظرة.

ولذلك يتحقق $\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle BFE}} = \left(\frac{AF}{BF}\right)^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\frac{AF}{BF} = 3}$

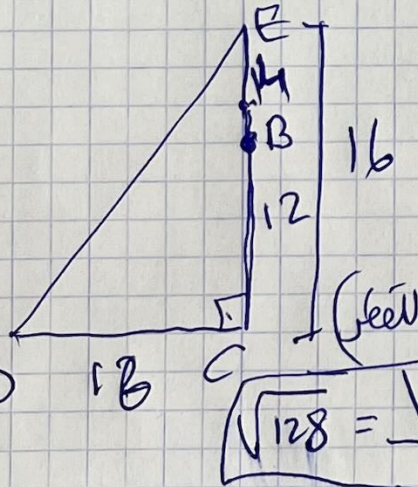
ج. معطى أن $EB = 4$ ومن نسبة التشابه من (ب) نتبع

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BE} = 3 \Rightarrow \frac{AD}{4} = 12 \Rightarrow \boxed{AD = 12}$$

$\boxed{AD = BC = 12}$

ومساحة المستطيل $ABCD = 192$

د. $\boxed{DC = 16} \Leftarrow 192 = \overset{12}{BC} \cdot DC = S_{ABCD}$ مساحة المستطيل



أي أطوال أضلاع المثلث DCE هي:

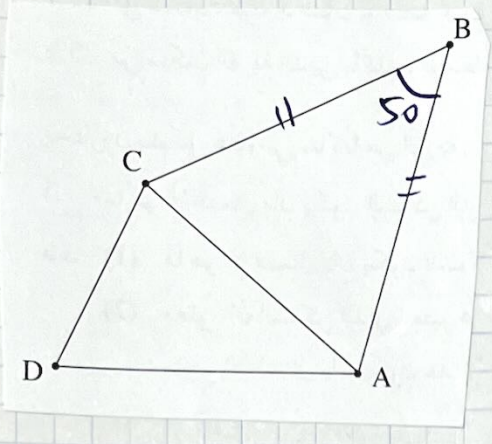
$DE^2 = CE^2 + DC^2 = 16^2 + 16^2 = 256 + 256$

$DE^2 = 512 \quad DE = \sqrt{512}$

المثلث DCE قائم الزاوية ولذلك سيكون وتر الدائرة المحيطة بالمثلث (قاعدة مقابلة للقطر) ولذلك فإن قطر الدائرة المحيطة هو $\boxed{\sqrt{128} = \sqrt{512}}$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 5



معطيات:

- المثلث ADC هادي الزاوية
- المثلث ABC متساوي الساقين فيه BC=BA
- الضلع CA مشترك للمثلثين
- $\measuredangle ABC = 50$ ← $\measuredangle ACB = \measuredangle BAC = 65$ ← $\frac{180-50}{2}$

مساحة المثلث ABC هي 113

أ. $S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot a \cdot \sin B}{2}$ ← $BC = AB = a$ نعوض

$S_{\triangle ABC} = 113 = \frac{a \cdot a \cdot \sin 50}{2} \Rightarrow 226 = a^2 \cdot \sin 50$

$\Rightarrow a^2 = \frac{226}{\sin 50} = 295.022 \Rightarrow a = \sqrt{295.022}$

$$\boxed{a = AB = AC = 17.18}$$

ب. في المثلث ABC نجد طول الضلع BC باستخدام قانون الـ cos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 50$$

$$AC^2 = (17.18)^2 + (17.18)^2 - 2(17.18)(17.18)(0.643)$$

$$AC^2 = 290.022 + 290.022 - 379.44 =$$

$$AC^2 = 210.8304 \Rightarrow \boxed{AC \approx 14.52}$$

www.IQsmart.co.il

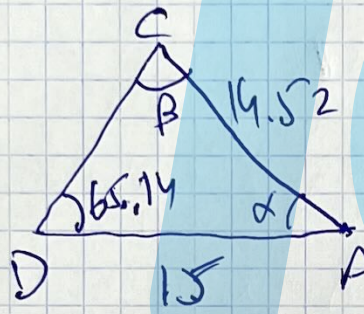
ب- نعطى أن نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث ADC هو R=8 ، نستنتج من ΔADC في sin بتطبيق قانون الـ

$$\frac{AC}{\sin\measuredangle ADC} = 2R \quad \left(\text{نصف قطر الدائرة } R \text{ المحيطة بـ } \Delta ADC\right)$$

$$\Rightarrow \frac{14.52}{\sin\measuredangle ADC} = \frac{16}{2\cdot 8} \Rightarrow 14.52 = 16\cdot \sin\measuredangle ADC$$

$$\Rightarrow \sin\measuredangle ADC = \frac{14.52}{16} = 0.9075$$

$$\sin\measuredangle ADC = 0.9075 \Rightarrow \boxed{\measuredangle ADC = 65.14}$$



ج. نعطى AD=15 نجد أولاً β ومن ثم نجد α.

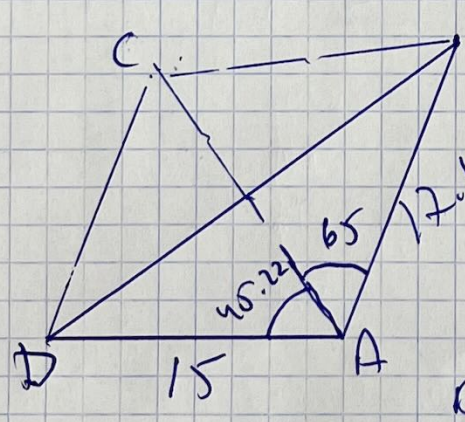
في ΔADC بتطبيق قانون الـ sin

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{16}{2R} \Rightarrow \frac{15}{\sin\beta} = 16 \Rightarrow 15 = 16\cdot\sin\beta$$

$$\sin\beta = \frac{15}{16} \Rightarrow \beta = 69.635$$

$$\measuredangle CAD = \alpha = 180 - 65.14 - 69.635 = 45.22$$

$$\boxed{\measuredangle CAD = 45.22}$$



د. بتطبيق قانون الـ cos في المثلث ABD:

$$\measuredangle DAB = 45.22 + 65 = \boxed{110.22}$$

ونستنتج

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos 110.22$$

$$BD^2 = 15^2 + (17.18)^2 - 2(17.18)(15)(-0.346)$$

$$BD^2 = 225 + 295.15 + 177.153 = 697.303$$

$$\boxed{BD = \sqrt{693.303} = 26.41}$$

www.iqsmart.co.il

حل سؤال 6

معطاة الدالة $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

أ. مجال تعريف الدالة هو $x\neq 0$

ب. تقاطع مع x $\leftarrow$ $y=0$

$$0=x+\frac{4}{x^2} \Rightarrow -x=\frac{4}{x^2} \Rightarrow -x^3=4$$

$$\Rightarrow x^3=-4 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-4}=-1.59$$

تقاطع مع x $(-1.59,0)$

$$f'(x)=1+\frac{0\cdot x^2-2x\cdot 4}{(x^2)^2}=1-\frac{8x}{x^4x^3}$$ -أ

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=1-\frac{8}{x^3}}$$

نقاط حرجة تحقق $f'(x)=0$

$$0=1-\frac{8}{x^3} \Rightarrow \frac{8}{x^3}=1 \Rightarrow 8=x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{8}=x \Rightarrow \boxed{2=x}$$

www.IQsmart.co.il

نفحص النقطة بواسطة جدول:-

x	$x=-1$		$x=1$		$x=3$
	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	+	‖	−	0	+
$f(x)$	↗	‖	↘	min	↗

$$f'(-1)=1-\frac{8}{(-1)^3}=9>0$$

$$f'(1)=1-\frac{8}{1^3}=-7<0$$

$$f'(3)=1-\frac{8}{3^3}=\frac{19}{27}>0$$

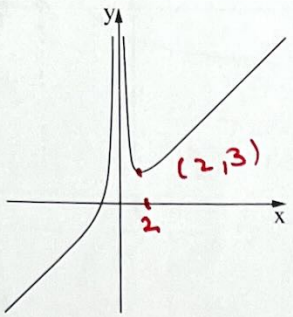
بعد ذلك:

$$f(2)=2+\frac{4}{2^2}=2+1$$

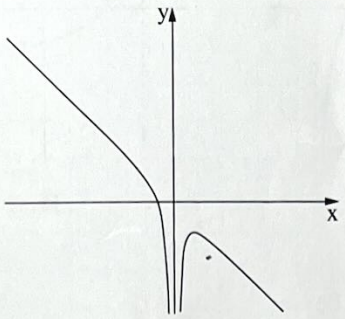
$$f(2)=3$$

$$\boxed{(2,3)\ \text{min}}$$

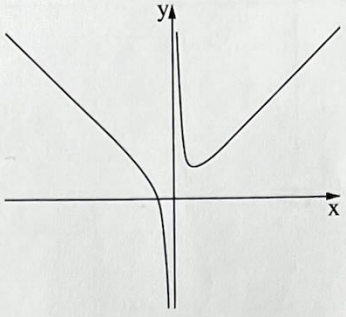
ب- بحسب المجالات المعادية من الجدول لمعيّنة النقطة العصوى، الرسم البياني الذي يمثل الدالة هو III



III



II



I

ج- الدالة موجبة في المجال $1 \le x \le 2$ وبذلك المساحة المحصورة هي:

$$S = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x + \frac{4}{x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 4\cdot\frac{-1}{x}\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right]_1^2 = \underbrace{\left(\frac{2^2}{2} - \frac{4}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\left(\frac{1^2}{2} - \frac{4}{1}\right)}_{-3.5} = 2.5$$

* تذكر: جذع الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هو $-\frac{1}{x^2}$ لأن $\int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x}$

إذن المساحة هي $S = 2.5$

www.iQsmart.co.il

حل سؤال 7

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+b}$$

أ. نعلم أن المستقيم يقطع المحور x في $(8,0)$ $\leftarrow f(8)=0$

$$f(8)=1+\frac{1}{2}\cdot 8-\sqrt{2\cdot 8+b}=0$$

$$\Rightarrow 1+4-\sqrt{16+b}=0 \Rightarrow 5-\sqrt{16+b}=0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{16+b}=-5 \Rightarrow \sqrt{16+b}=5 \overset{()^2}{\Rightarrow} 16+b=25$$

$$b=25-16 \Rightarrow \boxed{b=9}$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+9}$$

ب.

حال تعريف الدالة

$$2x+9\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -9 \Rightarrow \boxed{x\geq -4.5}$$

ج.1.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2\sqrt{2x+9}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$$

النقاط القصوى تحقق: $f'(x)=0$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x+9}}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2x+9}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+9}=2 \overset{()^2}{\Rightarrow} 2x+9=4$$

$$\Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow \boxed{x=-2.5}$$

(13)

x	-4.5	$x=-3$ $-4<x<-2.5$	-2.5	$x=-1$ $x>-2.5$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	min	↗

نعيّن نقطة من كل مجال

$$f'(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2(-1)+9}}=+$$

$$f'(-3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2(-3)+9}}=-$$

$$f(-4.5)=1+\frac{1}{2}(-4.5)-\sqrt{2(-4.5)+9}=-1.25$$

$$f(-2.5)=1+\frac{1}{2}(-2.5)+\sqrt{2\cdot(-2.5)+9}=-2.25$$

$\min(-2.5,-2.25)$

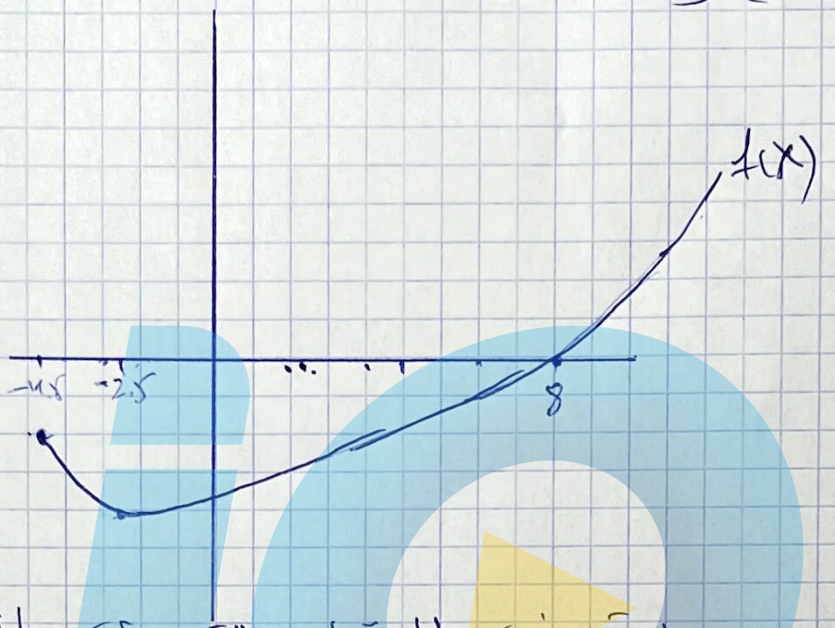
$(-4.5,-1.25)$ مجال تعريف الدالة

ב. 2. التقاطع مع المحور y ($x=0$)

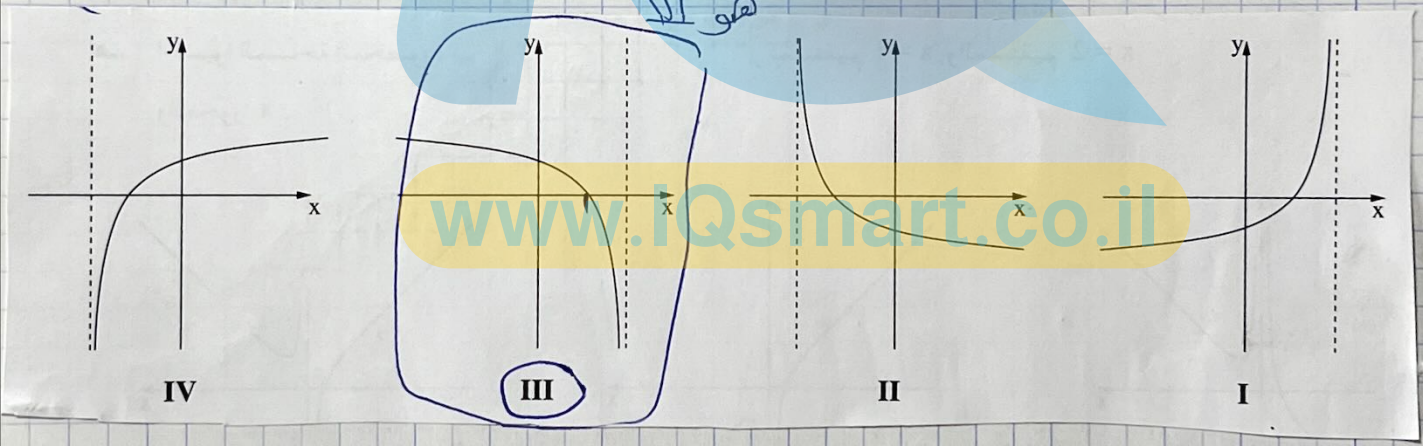
$f(0) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \sqrt{2\cdot 0 + 9} = 1 - \sqrt{9} = 1 - 3 = -2$

تقاطع مع y $(0,-2)$

ב. 3.

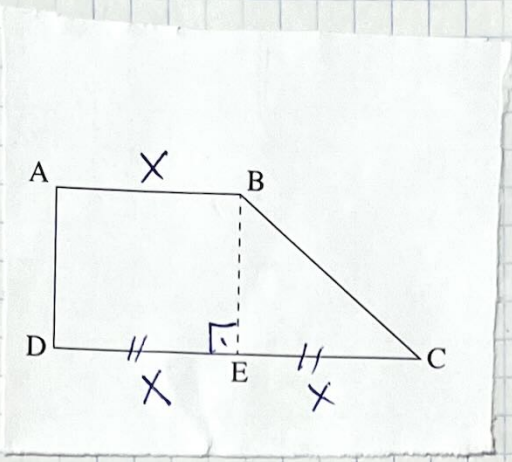


ג. يجب جدول تعيين العلامات القيمون والمجالات الموجبة والسالبة للمشتقة فالرسم الملائم للمشتقة هو III



www.IQsmart.co.il

حل سؤال 8



ABCD هو شبه منحرف

AB || DC

DC هي قطعة E

مساحة شبه المنحرف هي $12\sqrt{2}$

أ. $S_{ABCD} = \frac{BE}{2}(AB+DC)$

$$\frac{BE}{2}(X+2X) = 12\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3X} \Big/ BE \cdot \frac{3X}{2} = 12\sqrt{2} \Big/ \frac{2}{3X} \Rightarrow BE = \frac{24}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{X}$$

$$\boxed{BE = \frac{8\sqrt{2}}{X}}$$

ب. BC هو وتر شبه المنحرف و AD هو ساق شبه المنحرف $AD = BE = \frac{8\sqrt{2}}{X}$ في المثلث القائم BEC نجد BC.

يتبقى:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{X}\right)^2 + X^2$$

$$BC^2 = \frac{64\cdot 2}{X^2} + X^2 \Rightarrow BC^2 = \frac{128}{X^2} + X^2$$

www.IQsmart.co.il

مجموع مربعي ساقي شبه المنحرف هو

$$BC^2 + BE^2 = \underbrace{\frac{128}{X^2} + X^2}_{BC^2} + \underbrace{\frac{128}{X^2}}_{BE^2}$$

$$f(X) = \frac{128\cdot 2}{X^2} + X^2 \Rightarrow f(X) = \frac{256}{X^2} + X^2$$

$$f'(X) = \frac{0 - 256\cdot 2X}{X^4} + 2X = \frac{-512}{X^3} + 2X$$

$$f'(X) = \frac{-512}{X^3} + 2X$$

$f'(x)=0$

$$\frac{-512}{x^3}+2x=0 \Longrightarrow 2x=\frac{512}{x^3}$$

$$\Rightarrow 2x^4=512 \Rightarrow x^4=256 \Rightarrow x=\sqrt[4]{256}$$

$$\boxed{x=4}$$

نرسم جدول تغيرات حول $x=4$ كما يلي

f	x	$0<x<4$ ($x=1$)	4	$x>4$ ($x=5$)
	$f'(x)$	$-$		$+$
	$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f'(1)=\frac{-512}{1^3}+2\cdot 1=-510<0$$

$$f'(5)=\frac{-512}{5^3}+2\cdot 5=\frac{-512}{125}+10>0$$

www.IQsmart.co.il

نحسب $f(4)$

$$f(4)=\frac{256}{4^2}+4^2=16+16=32$$

$\min(4;32) \rightarrow$ القيمة الدنيا $f(4)=32$

وبما أن القيمة الدنيا تمثل مجموع مربعي العددين الموجبين فإن كل واحد منهما يجب أن يكون $\sqrt{32}$ أي $4\sqrt{2}$

<u>30</u>