حل نموذج بجروت

(807)-582

موعد (أ) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

السؤال الاول عُرض بـ 3 صيغات مختلفة:

الصيغة الاولى معادلة الدائرة التي مركزها N

$$(x-13)^2+y^2=R^2$$

الصيغة الثانية

$$(x-15)^2+y^2=R^2$$

والثالثة

$$(x-14)^2+y^2=R^2$$

الحل المعروض هنا ملائم للصيغة $(x-13)^2+y^2=R^2$

بحسب المعطيات:

معادلة الدائرة التي مركزها M هي:

$(x-a)^2+y^2=r^2$ $a>0$ بارامتر

ومعادلة الدائرة التي مركزها N هي:

$$(x-13)^2+y^2=R^2$$

وطول القطعة التي تصل بين مركزي الدائرتين هو 9

ويتحقق $\frac{R}{r}=\frac{2}{1}$. والدائرتين متماستين.

$$\Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{2}{1} \Rightarrow R=2r \Rightarrow R+r=9$$

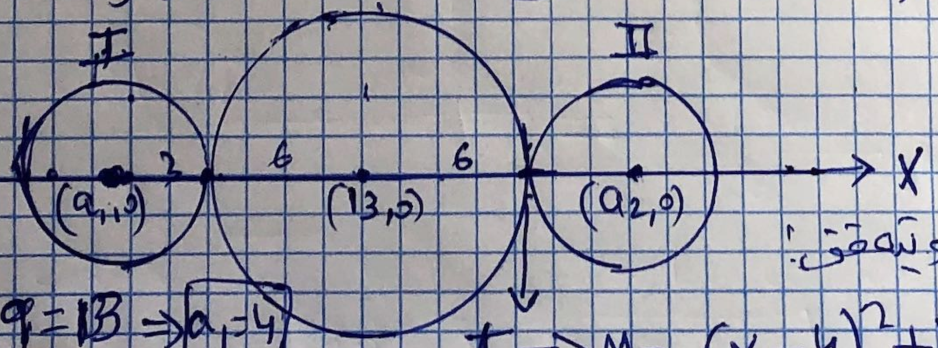
$$\Rightarrow 2r+r=9 \Rightarrow \boxed{r=3} / \boxed{R=6}$$

اذاً:

$$N: (x-13)^2+y^2=36$$

$$M: (x-a)^2+y^2=9$$

مركز الدائرة N هو $(13,0)$ ومركز الدائرة M $(a,0)$



ويتحقق:

I $a_1+9=13 \Rightarrow \boxed{a_1=4}$

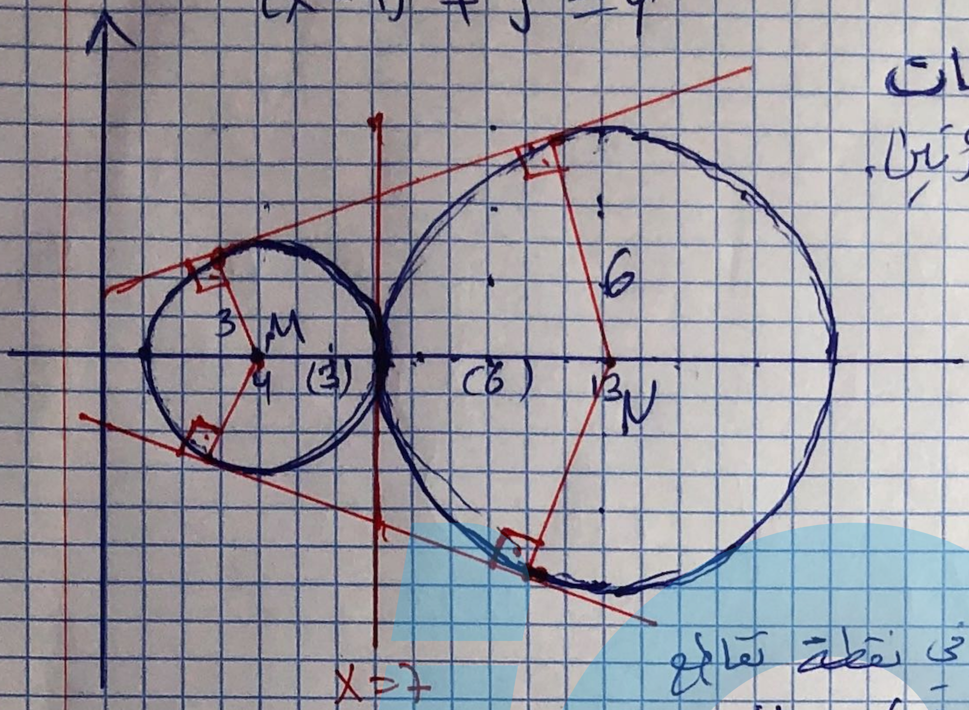
II $a_2=13+9 \Rightarrow \boxed{a_2=22}$

$I \Rightarrow M_I \ (x-4)^2+y^2=9$

$II \Rightarrow M_{II} \ (x-22)^2+y^2=9$

ب. بما ان $a<13$ اذا معادلة الدائرة M هي

$$(x-4)^2+y^2=9$$



يوجد 3 مماسات مشتركة للدائرتين.

ج- المماس يمر في نقطة تقاطع الدائرة M (او N) مع المحور x

ومعادلته $x=4+3=7$ ← $\boxed{x=7}$

او $x=13-6=7$

د- النقطة M تبعد 3 وحدات عن المماس ولذلك يتحقق:

$M(4,0)$: $mx-y+n=0$

(I) $$\frac{|m\cdot 4-0+n|}{\sqrt{m^2+1}}=3$$

النقطة N تبعد 6 وحدات عن المماس ولذلك يتحقق:

$N(13,0)$ $mx-y+n=0$

(II) $$\frac{|13m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=6$$

نقسم المعادلتين II على I:

$$\frac{|13m+n|}{|4m+n|}=2$$

بما ان النقطتان M و N تقعان تحت المستقيم لذلك الاشارة في التعبير داخل القيمة المطلقة نفسها

بما ان الاشارة داخل القيمة المطلقة تتغير:

يلغي اشارة القيمة المطلقة $\Rightarrow \dfrac{13m+n}{4m+2} = 2 \Rightarrow 13m+n = 8m+9n$

$\Rightarrow \boxed{n = 5m}$

نعوض في المعادلة I:

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Rightarrow \frac{|4m+5n|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$$

$$|9m| = 3\sqrt{m^2+1} \xrightarrow{:3} |3m| = \sqrt{m^2+1}$$

$$()^2 \Rightarrow 9m^2 = m^2+1 \Rightarrow 8m^2 = 1 \quad m^2 = \frac{1}{8}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$

وبالتالي هنالك امكانيتان لـ m و n

$\boxed{\mathrm{I} \quad m = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad , n = \frac{5}{\sqrt{8}}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0}$

$\boxed{\mathrm{II} \quad m = -\frac{1}{\sqrt{8}} \quad , n = -\frac{5}{\sqrt{8}}} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\sqrt{8}}x - y - \frac{5}{\sqrt{8}} = 0}$

هـ - المماسان اللذان وجدنا معادلاتهم من الممكن ان يكونا مماسان لدوائر مطابقة, مركزها بالجزء السالب من المحور x وبالتالي فهما ثلثان للدائرتين التي معنا بالسؤال أي للدائرة الصغيرة هنالك لها دائرة مماثلة بالجزء السالب وللكبيرة ايضاً. ولكي نجد معادلاتها علينا ان نجد نقطة تقاطع المماسين ومن ثم بواسطة التماثل نجد معادلاتهم.

نجد نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\text{I}\quad \frac{1}{\sqrt{8}}x - y + \frac{5}{\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{8}}x + \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\text{II}\quad \frac{-1}{\sqrt{8}}x - y - \frac{5}{\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{5}{\sqrt{8}}$$

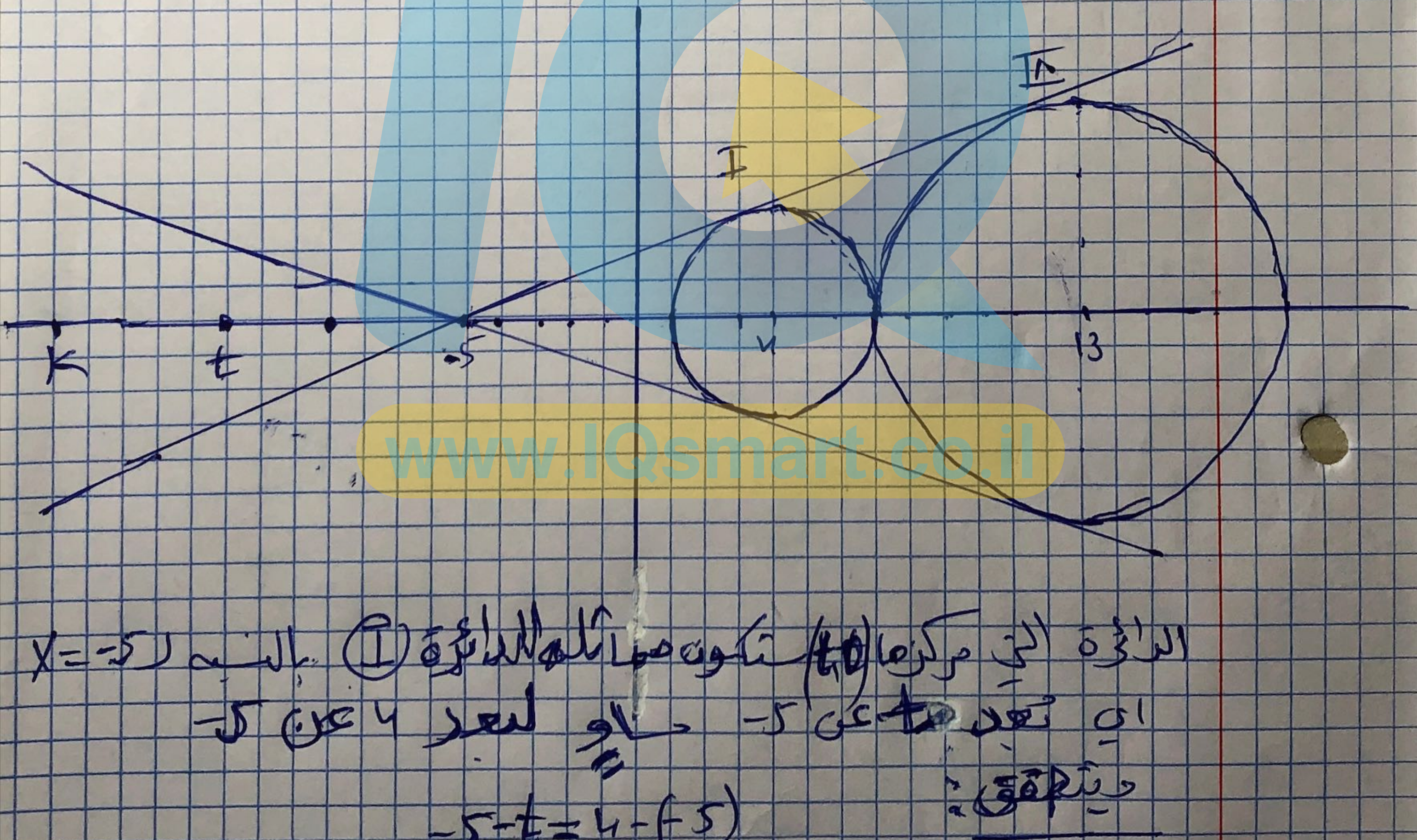
$$\text{I} = \text{II} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}x + \frac{5}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}x - \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$(*\sqrt{8}) \Rightarrow x + 5 = -x - 5 \Rightarrow 2x = -10 \quad \boxed{x = -5}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y = 0}$$

نقطة التقاطع $(-5,0)$



الدائرة التي مركزها $(t,0)$ ستكون مماثلة للدائرة (I) بالنسبة لـ $x = -5$

اي بعد t عن -5 مساوٍ لبعد 4 عن -5

ويتحقق:

$$-5 - t = 4 - (-5)$$

$$-5 - t = 9 \Rightarrow \boxed{-14 = t}$$

معادلة الدائرة هي: $(x+14)^2 + y^2 = 9$

الدائرة التي مركزها $(K,0)$ ستكون مماثلة للدائرة

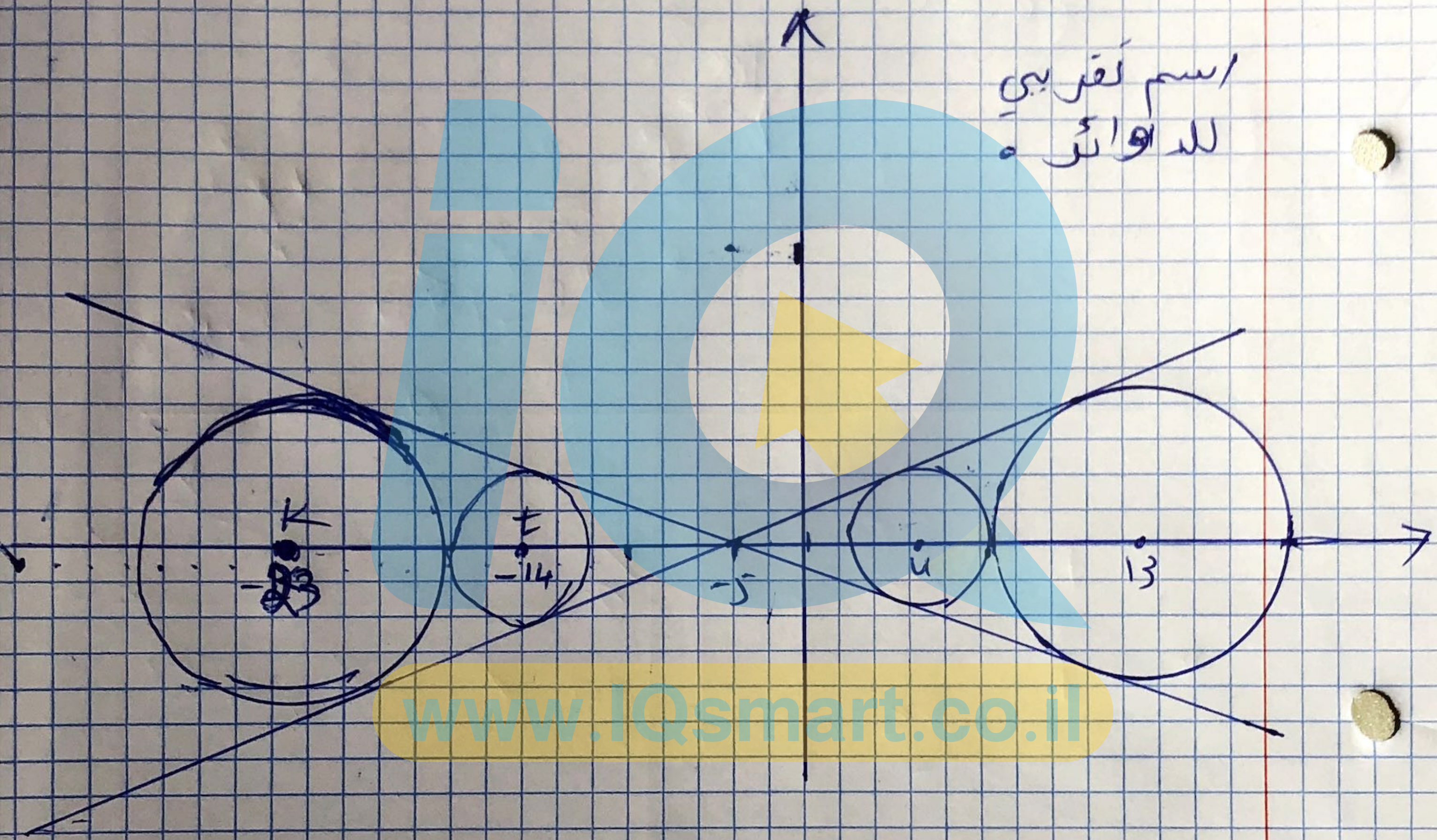
التي مركزها $(0,13)$, أي يتحقق :-

$$-5-K = 13+5 \Longrightarrow \boxed{K=-23}$$

ومعادلة الدائرة هي

$$\boxed{(x+23)^2+y^2=36}$$

رسم تقريبي
للدوائر .



حل سؤال 2

أ- $B:(7,5,5)$ $D(-2,5,-4)$

$A:(4,p,-1)$ $C(1,-1,2)$ p براميتر.

أ- معادلة المستوى $ABCD$:

نجد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DB}$ اللذان يفرشان المستوى (פורשים מישור)

$\overrightarrow{CB}: (7-1, 5-(-1), 5-2) = (6,6,3) \underset{:3}{=} (2,2,1)$

$\overrightarrow{CB}: (2,2,1)$

$\overrightarrow{DB} = (7-(-2), 5-5, 5-(-4)) = (9,0,9) \underset{:9}{\longrightarrow} (1,0,1)$

متجهان يفرشان المستوى $ABCD$ $\begin{cases} \overrightarrow{CB} = (2,2,1) \\ \overrightarrow{DB} = (1,0,1) \end{cases}$

ليكن $\underline{u}:(u_1,u_2,u_3)$ متجه عامد للمستوى $ABCD$

لذلك يتحقق

$\underline{u} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow 2u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$

$\underline{u} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow u_1 + 0 + u_3 = 0 \Rightarrow \boxed{u_1 = -u_3}$

نعوض في المعادلة الأولى:

$2u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$

$\Rightarrow 2(-u_3) + 2u_2 - u_3 = 0$

$-3u_3 + 2u_2 = 0 \Rightarrow 2u_2 = 3u_3$

نفرض $u_2 = 3$ اذاً $u_3 = 2 \Longrightarrow u_1 = -2$

$\underline{u} = (-2,3,2)$

المتجه $\underline{u}(-2,3,2)$ لعامد المستوى ABCD

لذلك معادلة المستوى من الصورة

$-2x+y+2z+d=0$

$\Rightarrow C:(1,-1,2) \Longrightarrow -2(1)-1+2\cdot 2+d=0$

$-2-1+4+d=0$

$1+d=0 \Rightarrow \boxed{d=-1}$

معادلة المستوى:

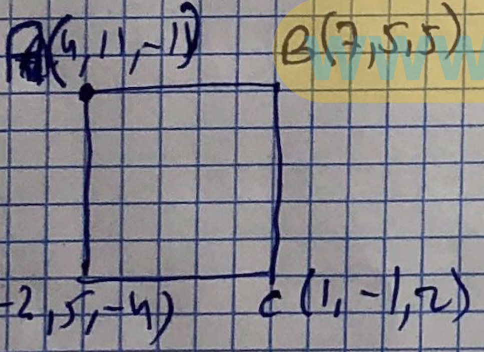
ABCD: $\boxed{-2x+y+2z-1=0}$

ب) النقطة $A(4,p,-1)$ تقع على المستوى ولذلك تحقق معادلته:

$-2\cdot 4+p+2(-1)-1=0$

$-8+p-2-1=0 \Longrightarrow \boxed{p=11}$

$\boxed{A:(4,11,-1)}$



ج) $\overrightarrow{CB}=(6,6,3)$

$\overrightarrow{DA}=(6,6,3)$

$\Downarrow$

$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{CB}|,\ \overrightarrow{DA}\parallel\overrightarrow{CB}$

وكذلك:

$\overrightarrow{CD}=(-3,6,-6)$

$\overrightarrow{BA}=(-3,6,-6)$

$\Downarrow$

$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BA}|,\ \overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{BA}$

$\Leftarrow$ اذًا الشكل الرباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

$\Leftarrow$ ومتساويين لذلك هو متوازي الأضلاع.

نفحص اذا ضلعين متجاورين متساويين ومتعامدين

معناها المتوازي أضلاع هو مربع

$$\vec{CB}\,(6,6,3) \Rightarrow |\vec{CB}| = \sqrt{6^2+6^2+3^2} = \sqrt{81} = 9$$

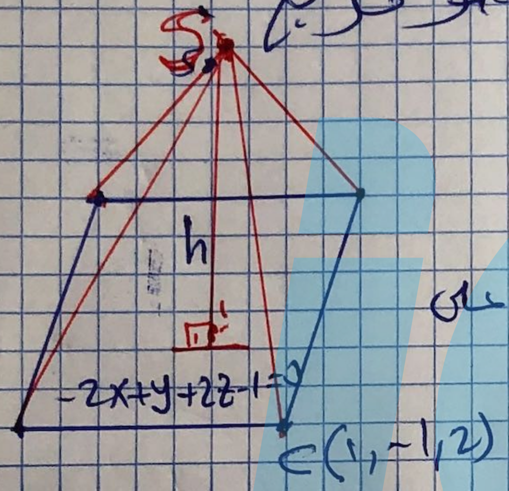
$$\vec{CD}\,(-3,6,-6) \Rightarrow |\vec{CD}| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-6)^2} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\vec{CD}| = |\vec{CB}|$$

$$\vec{CD}\cdot\vec{CB} = (6\cdot(-3) + 6\cdot 6 + 3(-6)) = -18+36-18 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CD} \perp \vec{CB}$$

اذاً الشكل ABCD هو مربع



(د)

$$SC: \underline{x} = (0,-4,1) + t(1,3,1)$$

النقطة S هي نقطة عامة على المستقيم ولذلك احداثياتها من الصورة:

$$S:(t,\,-4+3t,\,1+t)$$

$$V_{\text{الهرم}} = 81 = \frac{1}{3} S_{ABCD}\cdot h$$

$$S_{ABCD} = 9\cdot 9 = 81$$

اذاً: يتحقق:

$$V_{\text{الهرم}} = \frac{1}{3}\cdot 81\cdot h = 81$$

$$\Rightarrow \boxed{h=3}$$

من جهة اخرى h هو بعد S عن القاعدة:

اي يتحقق:

$$h = 3 = \frac{|-2t+(-4+3t)+2(t+1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|-2t-4+3t+2t+2-1|}{\sqrt{9}} \Rightarrow h = \frac{|3t-3|}{3} = 3$$

8

$$\frac{|3t-3|}{3} = 3 \Rightarrow \frac{3|t-1|}{3} = 3$$

$$\Rightarrow |t-1| = 3$$

$t-1=3$

$\boxed{t=4}$

$-(t-1)=3$

$-t+1=3 \Rightarrow \boxed{-2=t}$

$S: (t, -4+3t, 1+t)$

$S_1 (4, -4+3\cdot 4, 1+4) \Rightarrow \boxed{S_1: (4, 8, 5)}$ الامكانية I:

$t=4$

$S_2 (-2, -4+3(-2), 1+2) \Rightarrow \boxed{S_2 = (-2, -10, -1)}$ الامكانية II:

$t=-2$

ه - المستوى π المعطى معامد لـ $\vec{SC}$

ولذلك المتجه الاتجاهي العامد لـ π هو المتجه

الاتجاهي لـ $\vec{SC}$ أي $u_2(1,3,1)$ معامد لـ π

الزاوية بين مستويين هي الزاوية بين المتجهين

العامدين للمستويين. ونتحقق:

$$\cos\alpha = \left|\frac{u \cdot u_2}{|u| \cdot |u_2|}\right| = \left|\frac{(-2,1,2)(1,3,1)}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+9+1}}\right|$$

$$\cos\alpha = \frac{|(-2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1)|}{|\sqrt{9} \cdot \sqrt{11}|} = \frac{3}{\sqrt{99}}$$

$$\alpha = 72.451$$

حل سؤال 3

في الامتحان كان صيغتان للسؤال في البند (د). سنتطرق للفرق بينهم لاحقاً عندما نصل لحل البند (د).

بحسب المعطيات:

معطى المعادلة: $z^2+z\bar{z}=z+2\bar{z}+9+7i$

z_1 هو احد حلول المعادلة الذي يقع في الربع I

واضعاً z_1 يقع على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل.

نحل المعادلة, نجد z_1 ومن ثم نجد معادلة الدائرة:

نفرض $z=x+iy$ اذاً $\bar{z}=x-iy$

وبالتالي المعادلة:

$$\underbrace{(x+iy)^2}+(x+iy)(x-iy)=(x+iy)+2(x-iy)+9+7i$$

$$x^2-\cancel{y^2}+2xyi+x^2+\cancel{y^2}=x+iy+2x-2iy+9+7i$$

$$2x^2+2xyi=3x-iy+9+7i$$

$$2x^2-3x+2xyi+iy=9+7i$$

$$2x^2-3x+(2xy+y)\cdot i=9+7i$$

نساوي بين المركبات الحقيقية (Re) والوهمية (Im)

$$(Re):\ 2x^2-3x=9 \Longrightarrow 2x^2-3x-9=0 \Rightarrow \boxed{x_1=3}\quad \boxed{x_2=-1.5}$$

$$(Im):\ 2xy+y=7 \Longrightarrow y(2x+1)=7 \Rightarrow y=\frac{7}{2x+1}$$

$$x_1=3 \Longrightarrow y_1=\frac{7}{2\cdot3+1}=1$$

$$x_2=-1.5 \Longrightarrow y_2=\frac{7}{2(-1.5)+1}=-3.5$$

$$\boxed{z_1=3+i}$$

$$z_2=\boxed{-1.5-3.5i}$$

الحل الذي يقع بالربع الاول هو $\boxed{z_1=3+i}$

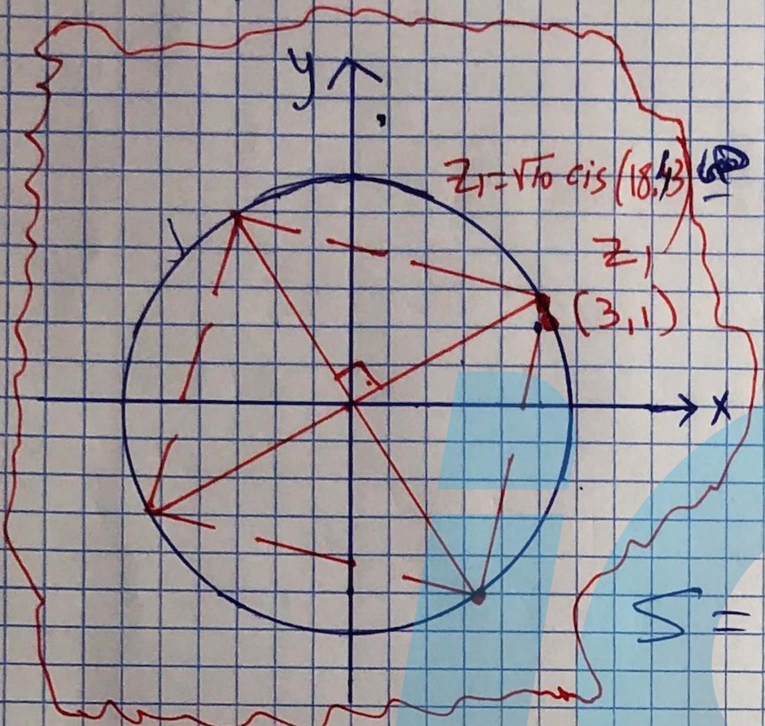
نجد معادلة الدائرة:

$z_1 = 3 + i$

$|r| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

اذاً معادلة الدائرة هي

$\boxed{x^2 + y^2 = 10}$



ب. اقطار المربع متعامدة

ولذلك مساحة المربع هي

$$S = \frac{(\text{القطر})^2}{2}$$

$\text{القطر} = 2r = 2\sqrt{10}$

في المربع

$$S = \frac{(2\sqrt{10})^2}{2} = \boxed{20}$$

وحدات مساحة

ج. بما ان الزاوية بين كل رأسين متجاورين في المربع هي $90°$ اذاً نضرب كل رأس بـ $cis90$ نحصل على الرأس المجاور. لذلك $cis90 = i$

$z_2 = z_1 \cdot i = (3+i)\cdot i = -1+3i \Rightarrow \boxed{z_2 = -1+3i}$

$z_3 = z_2 \cdot i = z_1 \cdot \underbrace{(i)^2}_{-1} = -z_1 = -3+i \Rightarrow \boxed{z_3 = -3+i}$

$z_4 = z_3 \cdot i = z_2 \cdot (i)^2 = -z_2 = 1-3i \Rightarrow \boxed{z_4 = 1-3i}$

جـ. في البند (جـ) هنالك اختلاف بين الصيغتين

في صيغة واحدة معطى انتم ضربوا رؤوس المربع ~~بالعدد~~ الذي بالربع الثاني والرابع بـ $r_2(cis(\alpha+30))$

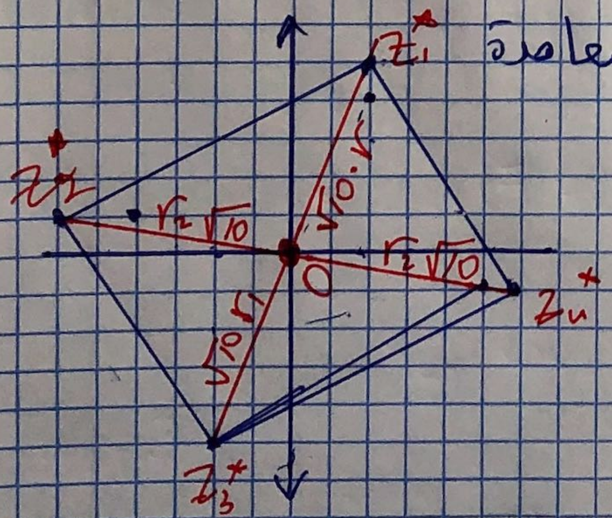
وفي صيغة ثانية معطى انتم ضربوا بـ $r_2(cis(\alpha+60)$

سنعرض الحل للصيغة التي ضربوا فيها الرأسين اللذين يقعان
في الربع II والرابع IV بـ $cis(\alpha+30)$.

بحسب المعطيات:

ضربنا الرأسين في الربع الأول والثالث بـ $r_1\, cis(\alpha)$
وضربنا الرأسين في الربع الثاني والرابع بـ $r_2 (cis\, \alpha+60)$
بحيث r_1 و r_2 عددين موجبين.

بما اننا ضربنا z_1 و z_3 بنفس العدد $r_1\, cis\alpha$
وكما وضحنا سابقا بأن z_1 و z_3 يقعان على استقامة
واحدة ونقطة الأصل هي منتصف القطعة $z_1 z_3$
لذلك في العددين الناتجين أيضا نقطة الأصل ستكون
منتصف العددين الجديدين z_1^* و z_3^*
والقيمة المطلقة للعددين هي: $r_1 \sqrt{10}$
وبنفس الأسلوب بخصوص العددين z_2 و z_4
بما اننا ضربناهم بنفس العدد $r_2\, cis(\alpha+60)$
اذا ستبقى نقطة الأصل منتصف القطعة z_2 و z_4
وبالتالي في الشكل الرباعي الناتج الأقطار تنصف بعضها
وهذا معناه ان الشكل هو متوازي أضلاع.



واضح ان الأقطار ليست متعامدة
لأننا لم نضرب كل الحلول
بنفس الزاوية... ولذلك لم
نحافظ على الزاوية القائمة
بين الأقطار.

ج

الشكل الرباعي الناتج هو متوازي أضلاع
أطوال أقطاره هي:

$z_1z_3 = 2r_1\cdot\sqrt{10}$ و $z_2z_4 = 2r_2\sqrt{10}$

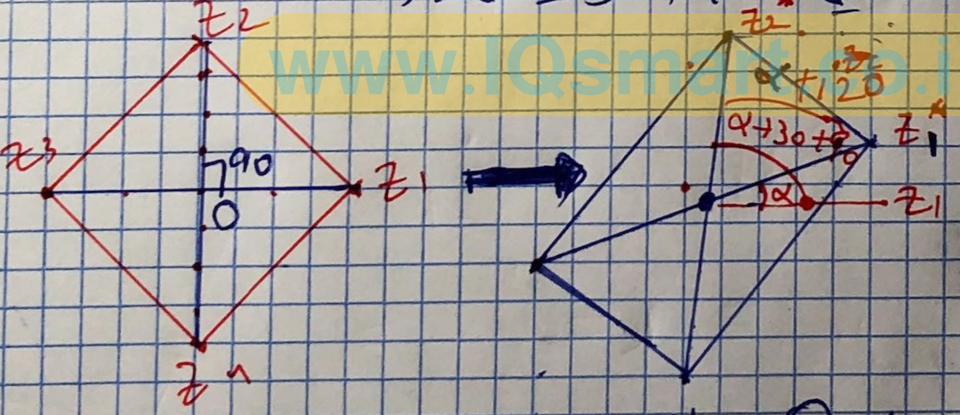
ولذلك مساحته هي

$$S = \frac{2r_1\cdot\sqrt{10}\cdot 2r_2\sqrt{10}}{2}\cdot \sin\theta$$

بحيث θ هي الزاوية بين القطرين z_1z_3 و z_2z_4

نجد الزاوية بين القطرين:-

الشكل الرباعي الاول كان مربعاً والزاوية بين الاقطار هي 90 بما اننا ضربنا z_1 و z_3 بـ $r_1 cis\alpha$ لذلك القطر z_1z_3 تحرك باتجاه القطر الاصلي بمقدار α درجات. وبما اننا ضربنا القطر z_2z_4 بـ $r_2 cis(\alpha+30)$ ولذلك القطر z_2z_4 "ابتعد" بزاوية مقدارها $(\alpha+30)$ واصبحت الزاوية الجديدة بين الاقطار هي $120^0 = 30+90$



اذاً $\theta = 120$ والمساحة:

$$\frac{2r_1\sqrt{10}\cdot 2r_2\sqrt{10}\cdot \sin 120}{2} = \frac{20r_1r_2\cdot\sqrt{3}}{2} = \boxed{10r_1r_2\cdot\sqrt{3}}$$

ومعطى أن مساحة المتوازي الأضلاع $\sqrt{3}$ أضعاف المربع:

$$10r_1r_2\cdot\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{r_1\cdot r_2 = 2}$$

حل سؤال 4

$$f(x)=xe^{x}-2e^{x}+1$$

أ.1 خط تقارب أفقي:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \cdot e^{\infty} - 2e^{\infty} + 1 \to \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underbrace{-\infty \cdot e^{-\infty}}_{0} - \underbrace{2e^{-\infty}}_{0} + 1 = 1$$

اذاً خط تقارب أفقي $\boxed{y=1}$ $x\to-\infty$.

أ.2 تقاطع مع y $\boxed{x=0}$

$$f(0)=0\cdot e^{0}-2\cdot e^{0}+1=-1$$

تقاطع مع y $\boxed{(0,-1)}$

$$f'(x)=1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}-2e^{x}=xe^{x}-e^{x}=e^{x}(x-1)$$

$$\boxed{f'(x)=e^{x}(x-1)}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \underset{\neq 0}{e^{x}}\underset{=0}{(x-1)}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

نُصنّف النقطة بواسطة المشتقة الثانية:

$$f''(x)=e^{x}(x-1)+e^{x}=x\cdot e^{x}-e^{x}+e^{x}$$

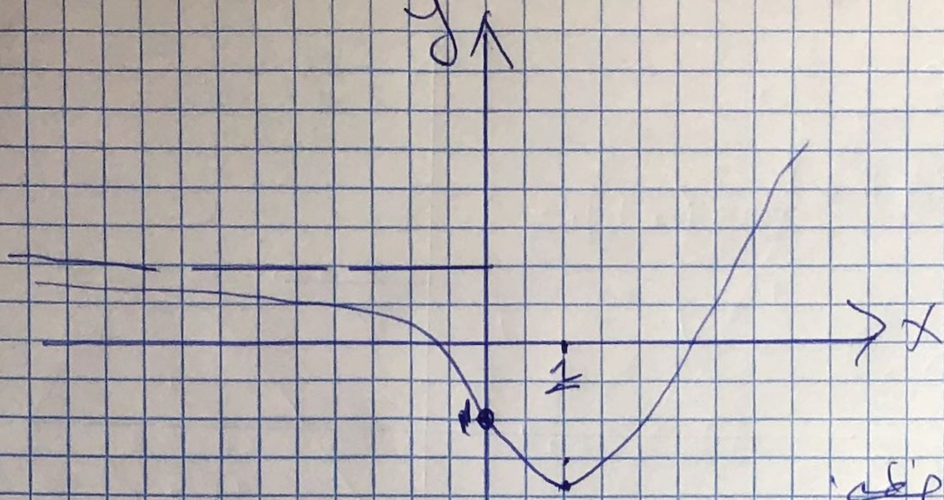
$$f''(x)=xe^{x}$$

$$f''(1)=1\cdot e^{1}=e>0 \Longrightarrow \boxed{x=1}$$ منهاية

$$f(1)=1\cdot e^{1}-2\cdot e^{1}+1=e-2e+1=\boxed{-e+1}$$

مجالات تنازلية $x<1$	مجالات تصاعدية $x>1$	$(1,-e+1)$ نهاية صغرى (min)

4. أ



* ملاحظة:

لا حاجة لإيجاد نقاط التقاطع مع x ...

ب.1

$$g(x)=\frac{1-e^x}{e^x-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{1-e^x}{e^x-x} \Longrightarrow \frac{-e^x}{e^x} = -1$$

التعبير e^x-x: يقترب من قيمة e^x فقط عندما $x\to\infty$ لأن e^x يقترب أسرع الى $+\infty$ من x ....

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{1-e^x}{e^x-x} = \frac{1-0}{0-\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

اذاً

خطوط التقارب

$x\to-\infty$	$y=0$
$x\to\infty$	$y=-1$

ب.2 تقاطع مع المحور x: $(y=0)$

$$\frac{1-e^x}{e^x-x}=0 \Longrightarrow 1-e^x=0 \Rightarrow 1=e^x$$

$$\Rightarrow \ln 1=\ln e^x \Longrightarrow \boxed{0=x} \Longrightarrow \boxed{(0,0)}$$

3.ℓ نبين أن $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(e^x-x)^2}$

$$g(x)=\frac{1-e^x}{e^x-x}$$

$$g'(x)=\frac{-e^x(e^x-x)-(1-e^x)\cdot(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

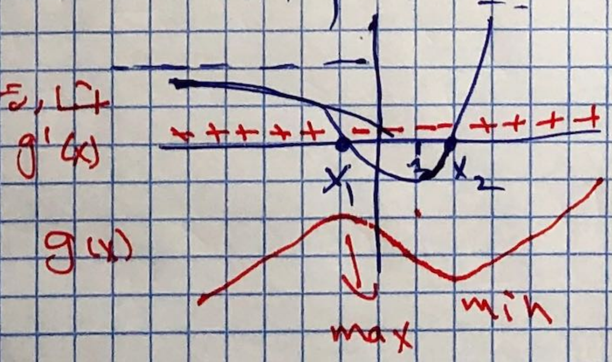
$$=\frac{-e^x(e^x-x)+(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{-e^x(e^x-x)+(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}$$

$$=\frac{\cancel{-e^{2x}}+x\cdot e^x+\cancel{e^{2x}}-2e^x+1}{(e^x-x)^2}=\frac{x\cdot e^x-2e^x+1}{(e^x-x)^2}=\frac{f(x)}{(e^x-x)^2}$$

إذاً $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(e^x-x)^2}$

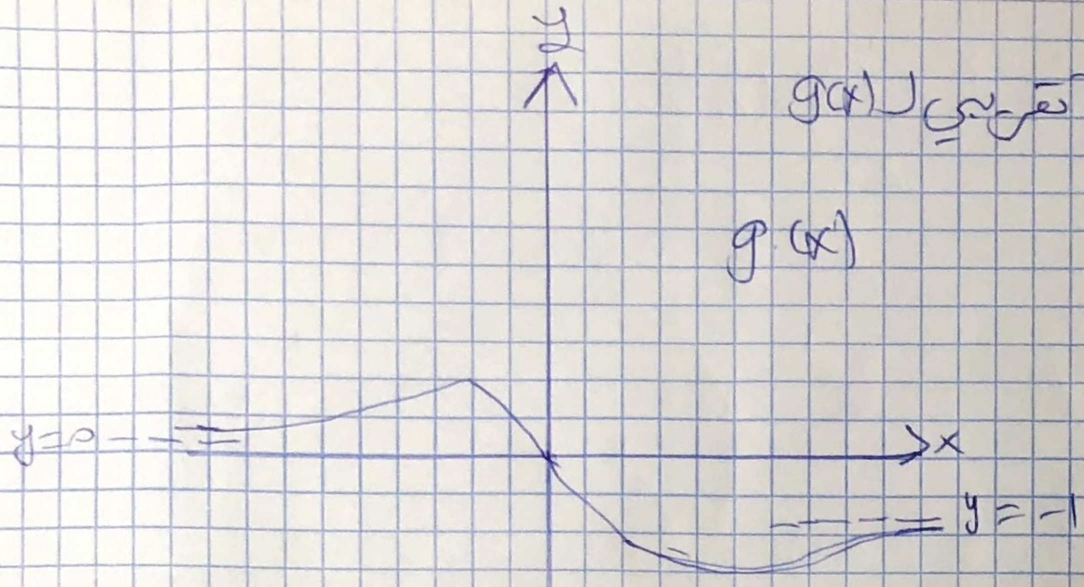
هو المطلوب

4.ℓ بما أن $g'(x)=\dfrac{f(x)}{(e^x-x)^2}$ لذلك النقاط الصفرية لـ $g'(x)$ هي النقاط الصفرية لـ $f(x)$ وحسب الرسم للدالة $f(x)$ هنالك نقطتان صفريتان أي نقطتان قصوى للدالة $g(x)$. وبما أن المقام في المشتقة $g'(x)$ موجب دائماً لذلك إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ وحسب رسم $f(x)$:



إذاً للإجمال:
للدالة $g(x)$ يوجد
نقطة عظمى واحدة
نقطة صغرى واحدة.

ه) رسم تقريبي لـ $g(x)$



هـ

المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة وهي:-

الدالة موجبة في المجال المطلوب

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{1-e^x}{e^x-x}\,dx \Longrightarrow$$ نلاحظ $(e^x-x)'=e^x-1$

ولذلك اذا فرضنا أن المقام هو $K(x)=e^x-x$
اذاً البسط هو $-K'(x)$ وبالتالي التكامل عبارة عن

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{-K'(x)}{K(x)}\,dx=-\int_{-1}^{0}\frac{K'(x)}{K(x)}\,dx=-\Big[\ln K(x)\Big]_{-1}^{0}$$

$$=-\Big[\ln(e^x-x)\Big]_{-1}^{0}=-\Big[\ln(e^0-0)-\ln(e^{-1}-(-1))\Big]$$

$$=-\Big[\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln\left(\tfrac{1}{e}+1\right)\Big]=\boxed{\ln\left(\tfrac{1}{e}+1\right)=0.313}$$ وحدة مساحة

حل سؤال 5

ملاحظة:

السؤال ظهر بصيغتين مختلفتين

في الصيغة الاولى الدالة كانت:

$f(x)=x+\ln(x^2-15)$

وفي الصيغة الثانية الدالة كانت

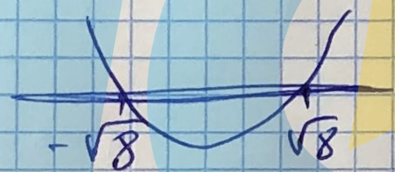
$f(x)=x+\ln(x^2-8)$

نعرض حل السؤال بحسب الدالة

$f(x)=x+\ln(x^2-8)$

أ) مجال تعريف الدالة:

$x^2-8>0$



مجال تعريف الدالة

$x<-\sqrt{8}$ و $x>\sqrt{8}$

2) خطوط التقارب

العمودية $x=\sqrt{8}$ // $x=-\sqrt{8}$

لا يوجد خطوط تقارب أفقية.

3) النقاط القصوى ونوعها:

$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2-8} \Rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 1+\frac{2x}{x^2+8}=0$

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2-8}=-1 \rightarrow 2x=-x^2+8 \Rightarrow x^2+2x-8=0$

← معادلة تربيعية حلولها

$\boxed{x_2=-4}$ $\boxed{x_1=2}$ ← خارج مجال تعريف الدالة

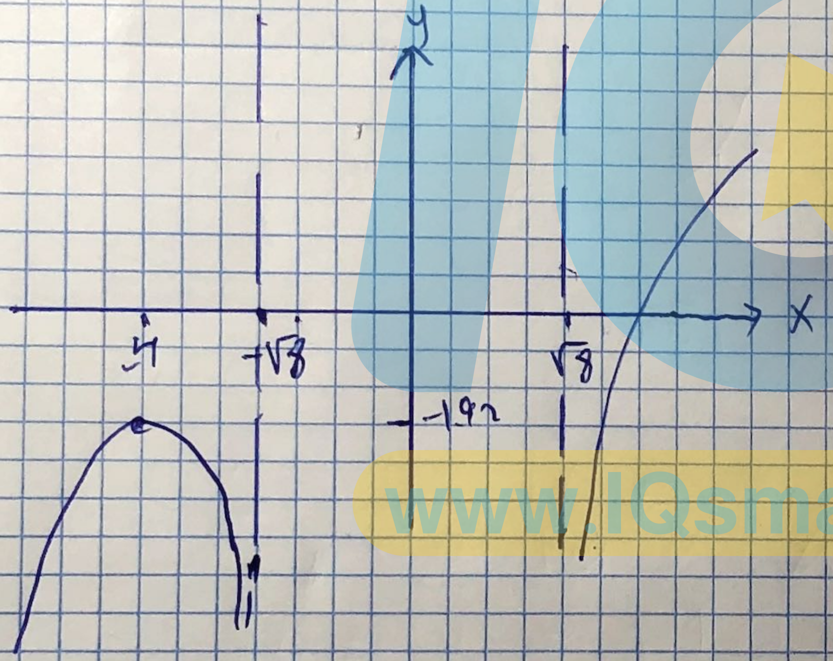
نقاط القصوى

x	↓	-4	↓	$-\sqrt{8}$	غير معرفة	$\sqrt{8}$		3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	X		X	$+$	
$f(x)$	↗	max	↘		↔		↗	

$$f(-4) = -4 + \ln((-4)^2 - 8) = -4 + \ln(8) = -1.92$$

$$(-4, -1.92)\ max$$

4. رسم تقريبي للدالة:



ب. $f'(x)$

حسب ما توصلنا اليه في البند السابق

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 8}$$

ولكن بما ان المشتقة غير معرفة عندما تكون الدالة $f(x)$ غير معرفة لذلك مجال تعريف الدالة المشتقة $f'(x)$ هو مجال تعريف $f(x)$ أي $\boxed{x < -\sqrt{8} \text{ أو } x > \sqrt{8}}$

ب 2. خطوط التقارب

$x=\sqrt{8}$ // $x=-\sqrt{8}$ عمودية

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$$

$$\boxed{y=1}$$
$x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1$$

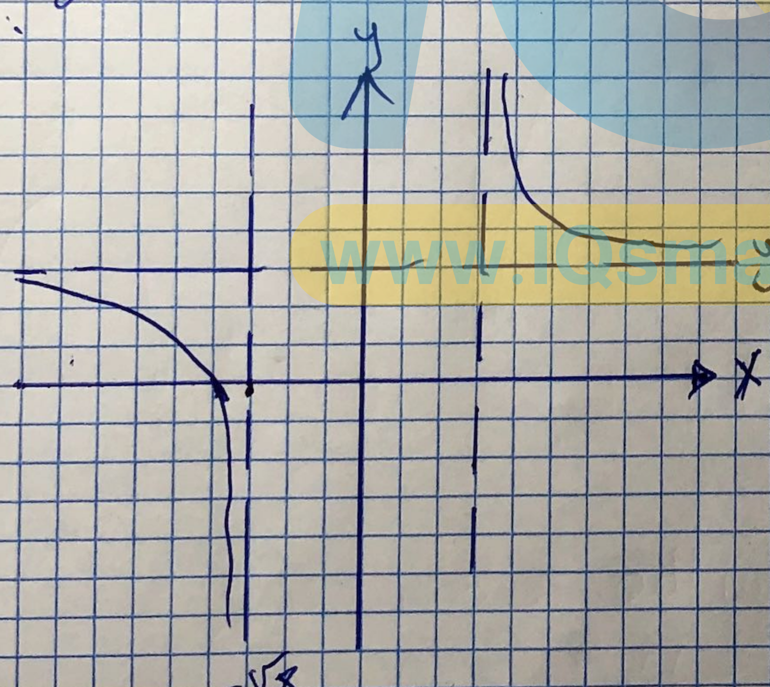
ب 3. تقاطع مع المحاور:

$f'(x)=0 \Longrightarrow \boxed{x=-4}$

$f(0)$ غير معرف

لا يوجد تقاطع مع y

ب 4.



$g(x)=e^{f(x)}$ ج.

1. النقاط القصوى للدالة $e^{f(x)}$ لها نفس الاحداثي x للدالة $f(x)$ ومن نفس النوع

لذلك $\max \boxed{x=-4}$

نجد y $g(-4)=e^{f(-4)}=e^{-1.92}=0.147$

اذا $(-4,0.147)$ مكسيمום لـ $g(x)$

2. مجالات تصاعدية وتنازلية

المجالات التصاعدية والتنازلية لـ $e^{f(x)}$ مطابقة للمجالات التصاعدية والتنازلية لـ $f(x)$.

مجالات تصاعدية $x>\sqrt{8}$ أو $x<-4$

مجالات تنازلية $-4<x<-\sqrt{8}$

د. المساحة المحصورة بين الدالة $y=f'(x)\cdot g(x)$ والمحور x والمستقيمات $x=-4$ و $x=-5$ هي

$$\int_{-5}^{-4} f'(x)\cdot g(x)\,dx=\int_{-5}^{-4} f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx=\left[e^{f(x)}\right]_{-5}^{-4}$$

$$=e^{f(-4)}-e^{f(-5)}=e^{-1.92}-e^{-2.166}=0.0325$$

وحدات مساحة