حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد (أ) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

ملاحظة عامة

في موعد صيف (أ) 2022 كان هنالك 3 إمتحانات مختلفة لإمتحان البجروت نموذج رقم (482) [035482]
الحل المعروض هنا ملائم لواحدة من هذه الإمتحانات والنموذج الملائم هو النموذج المرفق في الموقع.

سؤال 1

أ) a_n متوالية هندسية.

$a_5=p$ ، $a_3=4p$ ، p برامتر.

$$a_5=a_1\cdot q^4,\quad a_3=a_1\cdot q^2 \Longrightarrow \frac{a_5}{a_3}=\frac{\cancel{a_1}\cdot q^{\cancel{4}}}{\cancel{a_1}\cdot q^2}=\frac{p}{4p}$$

$$\Longrightarrow q^2=\frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} \boxed{q=\pm\frac{1}{2}}$$

ب) بحسب المعطى، كل حدود المتوالية a_n اللانهائية موجبة
لذلك $\boxed{q=\frac{1}{2}}$ ومجموع كل حدود المتوالية هو 4
أي يتحقق:

$$S_\infty=4=\frac{a_1}{1-q}$$

$$\Longrightarrow 4=\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} \Longrightarrow 4=\frac{a_1}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \boxed{2=a_1}$$

نجد p: بما أن $a_3=4p$ إذاً يتحقق:

$$a_3=a_1\cdot q^2=4p \Longrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=4p$$

$$\Longrightarrow 2\cdot\frac{1}{4}=4p \Longrightarrow 4p=\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_3} \Longrightarrow \boxed{p=\frac{1}{8}}$$

ب) تعيين المعطيات

$\boxed{b_1 = 2 \quad b_3 = \frac{1}{2}}$

$b_1 = a_1 = 2$

$b_3 = a_3 = \frac{1}{2}$

بما أن المتوالية حسابية اذاً يتحقق:

$b_3 = b_1 + 2d$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2 + 2d \Rightarrow \frac{1}{2} - 2 = 2d$

$\Rightarrow \frac{-1.5}{2} = d \Rightarrow \boxed{\frac{-3}{4} = d}$

في المتوالية يوجد 67 حد، عدد الحدود الزوجية هو 33.
الحدود في الاماكن الزوجية عبارة عن متوالية حسابية
حدها الأول هو $b_2 = b_1 + d$ ⇐ $b_2 = 2 - \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \boxed{b_2 = 1.25}$

وفرقها $2d$ اي $2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = \boxed{-1.5}$

من هنا:

مجموع الحدود في الاماكن الزوجية

$S_{33} = \frac{33}{2}\left[2 \cdot (1.25) + (33-1) \cdot (-1.5)\right]$

$S_{33} = 16.5\left[2.5 + 32(-1.5)\right] = 16.5(-45.5)$

$\boxed{S_{33} = -750.75}$ مجموع الحدود في الاماكن الزوجية في المتوالية b_n هو $\boxed{-750.75}$

سؤال 2

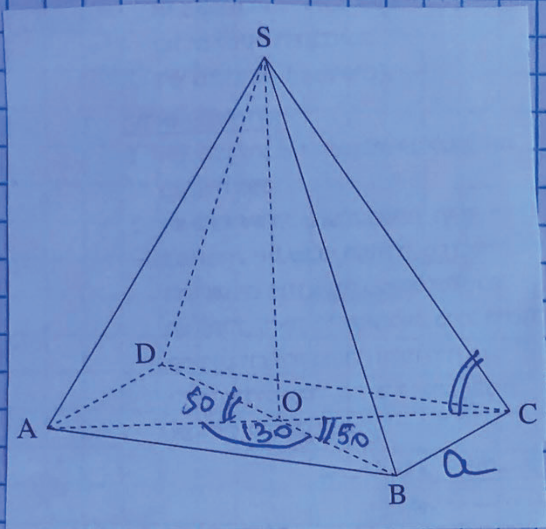
بحسب المعطيات:

S_{ABCD} هو هرم تام

ABCD مستطيل

الزاوية الحادة بين قطري المستطيل هي 50 والمنفرجة 130°

SO هو ارتفاع الهرم



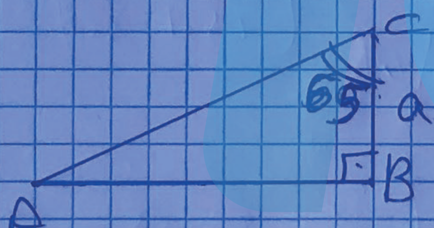
لهذا، المستطيل متساوي ومنصف بعضهم

$AO=OC=OD=OB$

* ومعطى أن $\boxed{SO=AB}$

أ- $BC=a$ (معطى)

$$\angle OBC=\angle OCB=\frac{180-50}{2}=65$$



$$\underbrace{tg\,65}_{2.1445}=\frac{AB}{a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{2.1445a=AB}$$

ب- نجد AC أولا:

في ΔABC يتحقق:

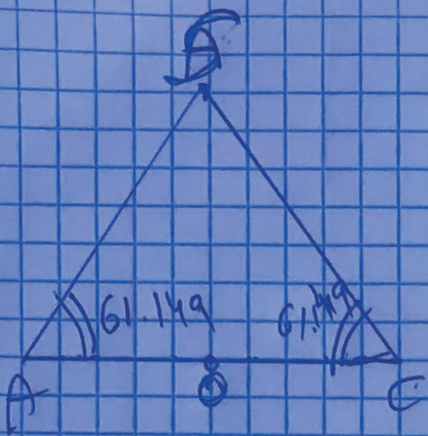
$$\overbrace{\cos 65}^{0.4226}=\frac{\overbrace{BC}^{a}}{AC}$$

$$AC=\frac{a}{0.4226}=2.3662a \Longrightarrow \boxed{AC=2.3662a}$$

$$OC=\frac{AC}{2}=\frac{2.3662a}{2}=1.1831a \Longrightarrow \boxed{OC=1.1831a}$$

في ΔSOC $\boxed{SO=AB=2.1445a}$

$$tg\angle ACO=\frac{SO}{OC}=\frac{2.1445\cancel{a}}{1.1831\cancel{a}}=1.1712 \Longrightarrow \boxed{\angle ACO=61.149}$$



ج. المثلث ASC مثلث متساوي الساقين

$AS = SC$

$\Rightarrow \measuredangle ACS = \measuredangle SAC = 61.149$

$\measuredangle ASC = 180 - 2(61.149)$

$\boxed{\measuredangle ASC = 57.7}$

د. معطى أن مساحة المثلث ASC هي 18.

$$S_{\triangle ASC} = \frac{SO \cdot AC}{2} = \frac{2.1445a \cdot 2.3662a}{2} = 18$$

$$\Rightarrow 5.0743a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = \frac{36}{5.0743} = 7.0945$$

$$a = \sqrt{7.0945} = 2.663$$

$$\boxed{a = 2.663}$$

هـ. حجم الهرم

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} SO$$

$\boxed{a = 2.663}$

$AB = 2.1445a = \boxed{5.71}$

$BC = a = 2.663$

$SO = AB = 2.1445a = \boxed{5.71} \Rightarrow EO = \frac{SO}{2} =$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 5.71 \cdot (2.663)\left(\frac{5.71}{2}\right) = 14.484$$

$$\boxed{V_{EABCP} = 14.484}$$

سؤال 3

a برامتر ثابت

$f(x) = a + \frac{1}{2}\sin(2x)$

مجال التعريف $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$

أ- $f'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2x = \cos 2x$

$\boxed{f'(x) = \cos 2x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

$k = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ X في المجال

$k = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4}}$

$f(\frac{\pi}{4}) = a + \frac{1}{2}\sin(2\frac{\pi}{4}) = a + \frac{1}{2}$

$f(-\frac{\pi}{4}) = a + \frac{1}{2}\sin(2(-\frac{\pi}{4})) = a - \frac{1}{2}$

نفحص النقاط حسب المشتقة الثانية

$f''(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$

$f''(\frac{\pi}{4}) = -2(\sin\frac{\pi}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{4}, a + \frac{1}{2}) \text{ max}}$

$f''(-\frac{\pi}{4}) = -2\sin(-\frac{\pi}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{(-\frac{\pi}{4}, a - \frac{1}{2}) \text{ min}}$

نحدد نوع نقاط القصوى في الأطراف

$f(-\frac{\pi}{3}) = a + \frac{1}{2}\sin(2(-\frac{\pi}{3})) = a - \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{(-\frac{\pi}{3}, a - \frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ max}}$

$f(\frac{\pi}{3}) = a + \frac{1}{2}\sin(2 \cdot \frac{\pi}{3}) = a + \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{3}, a + \frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ min}}$

ب- احداثيات النقطة القصوى العظمى الداخلية هي

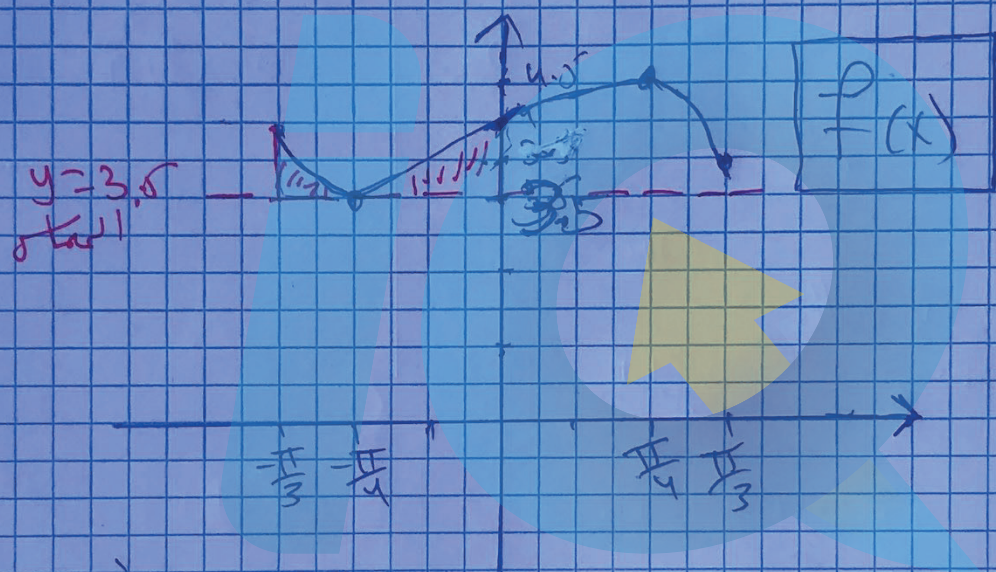
$$\left(\frac{\pi}{4}, a+\frac{1}{2}\right)$$

ويتحقق $a+\frac{1}{2}=4.5 \Longrightarrow \boxed{a=4}$

ج $\boxed{a=4} \Longrightarrow$ احداثيات النقاط القصوى:

$$\left(-\frac{\pi}{3}, 4-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Big/\Big/ \left(-\frac{\pi}{4}, 3.5\right) \Big/\Big/ \left(\frac{\pi}{4}, 4+\frac{1}{2}\right) \Big/\Big/ \left(\frac{\pi}{3}, 4-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

max طرفي — min — max — min طرفي



د في نقطة النهاية الصغرى الداخلية يتحقق $f'(x)=0$

أي أن ميل المماس هو 0 والمماس موازٍ لمحور x.

ولذلك الاحداثي y هو 3.5 ومعادلة المماس هي $\boxed{y=3.5}$

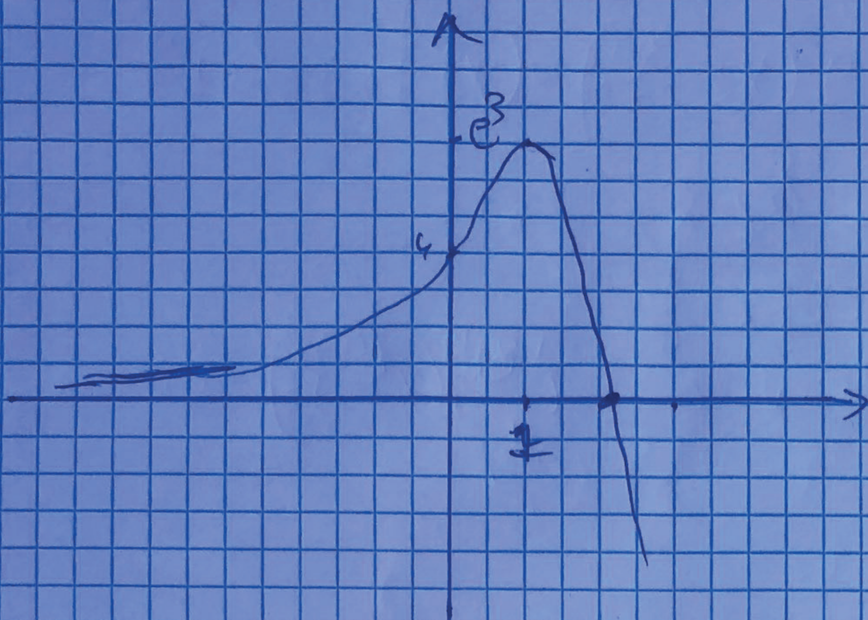
د.ع المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة وهي عبارة عن:

$$\hookrightarrow \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x)-3.5\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} 4+\frac{1}{2}\sin 2x-3.5\,dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} 0.5+\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$\Longrightarrow \left[0.5x+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\left[0.5x-\frac{\cos 2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0}=\left[\left(0-\frac{\cos 0}{4}\right)-\left(0.5\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{4}\right)\right]$$

$$=\boxed{\frac{\pi}{6}-\frac{3}{8}}$$

أ



ب $g(x)=-2f(x)-3$

$$g'(x)=-2\cdot f'(x)$$

$$g'(x)=0 \rightarrow -2f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$$

في البند أ : $\boxed{x=1}$

بما أن $g'(x)=-2f'(x)$ لذلك تتبدل المجالات التصاعدية والتنازلية في $g(x)$ مقارنة مع $f(x)$ وبالتالي $x=1$ هو نقطة مينيمام.

نجد الصادي $y \Leftarrow$

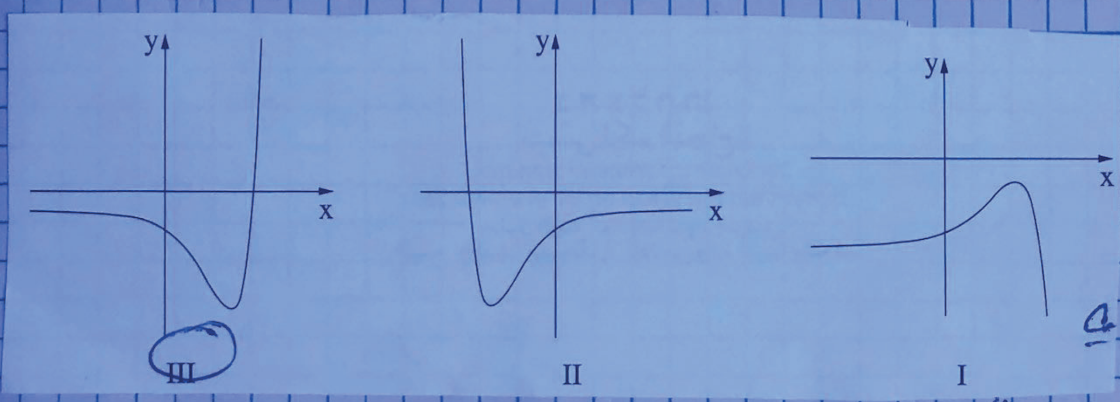
$$g(1)=-2f(1)-3$$

$$g(1)=-2e^3-3=-2e^3-3$$

إذن: $(1,-2e^3-3)$ مينيمام لـ $g(x)$

(8)

ج-2



الرسم الملائم هو III لأنه يبدل المجالات التصاعدية والتنازلية لـ f والموجب والسالب أيضاً.

سؤال 5

$$f(x)=x(\ln x)^2$$

$x>0$ أ. مجال تعريف الدالة

ب.

$$f'(x)=1\cdot(\ln x)^2+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot 2\ln x$$

$$f'(x)=(\ln x)^2+2\ln x=\ln x(2+\ln x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x(2+\ln x)=0$$

$\ln x=0$ $2+\ln x=0$

$\boxed{x=1}$ $\ln x=-2 \Rightarrow \boxed{x=e^{-2}}$

0.135

جدول النقاط القصوى

x	$x<e^{-2}$ $x=0.1$	e^{-2}	$e^{-2}<x<1$ $x=0.5$	1	$x>1$ $x=2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(0.1)=\ln(0.1)(2+\ln 0.1)>0$$

$$f'(0.5)=\ln(0.5)(2+\ln 0.5)<0$$

$$f'(2)=\underbrace{\ln 2}_{+}\underbrace{(2+\ln 2)}_{+}>0$$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\left(\ln\frac{1}{e^2}\right)^2$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{4}{e^2}}$$

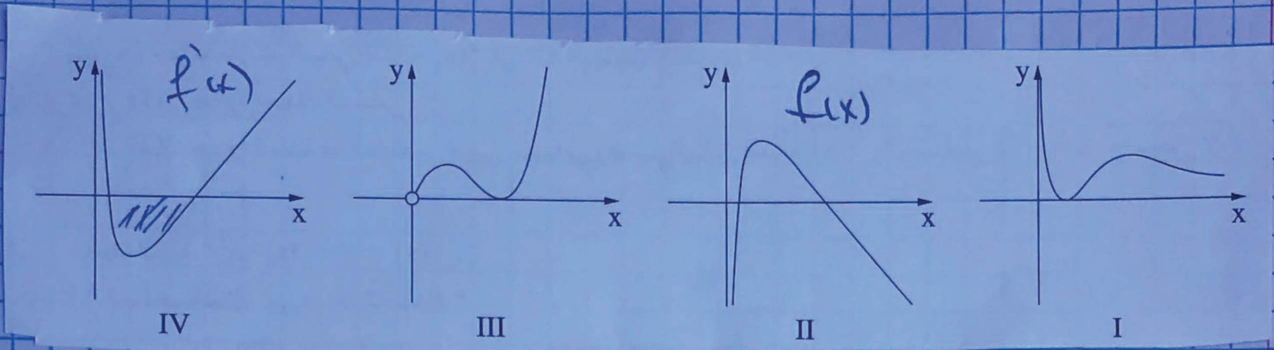
$$f(1)=1\cdot(\ln 1)^2=0$$

$$\boxed{f(1)=0}$$

max $\left(e^{-2}, 4e^{-2}\right)$ $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$ $(1,0)$ min

9

(ب)



الرسم الملائم لـ $f(x)$ هو III لانه الوحيد الذي يعرض نقطة سكون ونقطة انقلاب واحداثي x لنقطة السكون الصغرى الاحداثي x لنقطة الانقلاب:

انتبه: لتحديد الرسم الملائم لا حاجة لفحص ان $x=0$ هو نقطة.

ورسم المشتقة هو IV لانه يتلائم مع الحالات الوحيدة السابقة

(ب) المساحة المطلوبة هي

$$S=\left|\int_{\frac{1}{e^2}}^{1} f'(x)\,dx\right| = \left|\Big[f(x)\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{1}\right|$$

$$=\left|\Big[x(\ln x)^2\Big]\right| = \left|\underbrace{1\cdot(\ln 1)^2}_{0} - \underbrace{\frac{1}{e^2}\cdot\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2}_{\frac{4}{e^2}}\right| = \left|-\frac{4}{e^2}\right|$$

$$\boxed{S=\frac{4}{e^4}}$$