# حل نموذج بجروت

# 805-482

# موعد شتاء 2020

# طاقم الرياضيات

# معهد IQ

حل نموذج 482 (805)
موعد شتاء 2020

## حل سؤال 1

أ. بحسب معطيات السؤال :- $q=\frac{1}{4}$ $S_n=9\frac{1}{3}$

$a_1=?$

$$S_n=\frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 9\frac{1}{3}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow 9\frac{1}{3}=\frac{a_1}{\frac{3}{4}}$$

$$\Longrightarrow a_1=\frac{3}{4}\cdot 9\frac{1}{3}=7$$

الحد الاول في المتوالية هو 7 $\boxed{a_1=7}$

ب. بحسب معطيات السؤال ، اضافوا بين كل حدين في المتوالية الاصلية حداً جديداً بحيث تكونت متوالية هندسية لا نهائية جديدة فيها كل الحدود موجبة :-

المتوالية الأصلية هي:

$7, 7\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{4}, \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{16}, \ldots$

المتوالية الجديدة هي:

$7, b_2, \frac{7}{4}, \ldots$ اي ان الحد الثالث في الجديدة هو $\frac{7}{4}$

اي أن $b_1=7$ $b_3=\frac{7}{4}$

$$b_3=b_1\cdot Q^2 \Longrightarrow \frac{7}{4}=7\cdot Q^2 \Longrightarrow \frac{1}{4}=Q^2$$

$$\Rightarrow Q=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

ولكن بما ان حدود المتوالية الجديدة كلها موجبة لذلك $Q=\frac{1}{2}$ اي أن اساس المتوالية الجديدة هو $\frac{1}{2}$

$\boxed{Q_b=\frac{1}{2}}$

ب. في المثال السابق رأينا أن الحدود في المتوالية الجديدة هي:

$a_1=b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3=a_2\ ,\ b_4\ ,\ b_5=a_3$

وبالتالي الحد الخامس في المتوالية الجديدة هو الثالث في الاصلية. والادعاء I خطأ. لان $b_5=a_3$ و $b_5\neq a_6$

$\boxed{\text{الادعاء I خطأ}}$

الحدود الواقعة في الاماكن الزوجية في المتوالية الجديدة هي:-

$b_2, b_4, b_6, \_\_\_\_$

وهذه المتوالية أساسها هو $q_b^2$ اي $\frac{1}{4}$، وحدها الأول هو $b_2=7\cdot\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{b_2=3.5}$

وبالتالي مجموعها هو:-

$$S_n=\frac{b_2}{1-\frac{1}{4}}$$

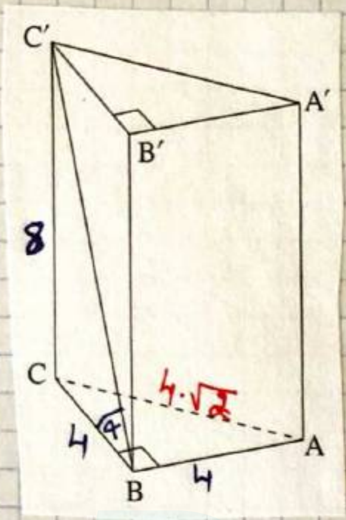
$$S_n=\frac{3.5}{0.75}=4\tfrac{2}{3}$$

وبالفعل نتحقق أن $\left(9\tfrac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=4\tfrac{2}{3}$

اي مجموع الحدود في الاماكن الزوجية في المتوالية الجديدة هو $\frac{1}{2}$ مجموع الحدود في المتوالية الاصلية.

الادعاء II صحيح

## حل سؤال 2




أ) بحسب المعطيات AB=AC

وبالتالي نفرض أن AB=x إذاً

في المثلث ABC بحسب نظرية فيثاغورس

يتحقق:

$$\underbrace{x^2}_{AB^2}+\underbrace{x^2}_{AC^2}=\underbrace{(4\cdot\sqrt{2})^2}_{AC^2}$$

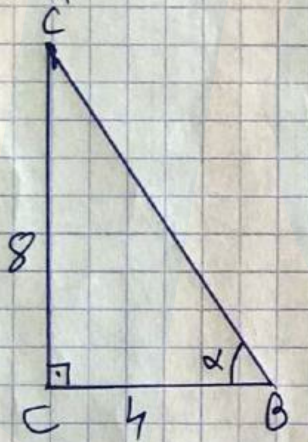
$$2x^2=32 \longrightarrow x^2=16$$

$$\boxed{x=\sqrt{16}=4}$$

إذاً $\boxed{AB=BC=4}$

مطلوب حساب مقدار $\measuredangle AC'B$ المبينة بالرسم $\alpha$.

ويتحقق:




$$\tan\alpha=\frac{8}{4}=2$$

$$\Longrightarrow \alpha=63.43^\circ$$

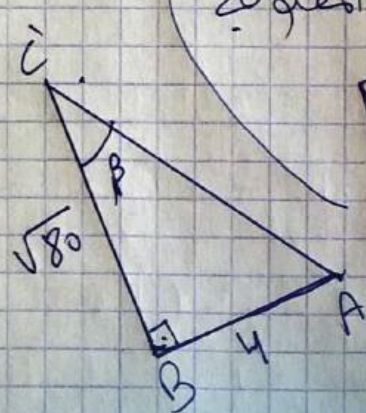
إذاً $\boxed{\measuredangle C'BC=63.43^\circ}$

ب) نرسم الضلع AC' ونجد الزاوية المطلوبة

بما أن المنشور هو منشور قائم

لذلك $90^\circ=\measuredangle C'BA$

وبحسب فيثاغورس في المثلث C'CB

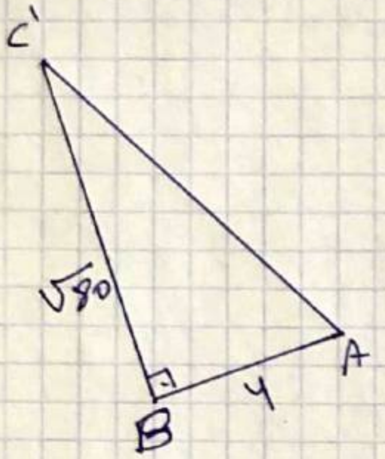



يتحقق: $(C'B)^2=4^2+8^2$

$$(C'B)^2=16+64=80$$

$$C'B=\sqrt{80}$$

وبالتالي $tg\beta=\frac{4}{\sqrt{80}} \Longrightarrow \beta=24.09^\circ \Longrightarrow \measuredangle BC'A=24.09^\circ$



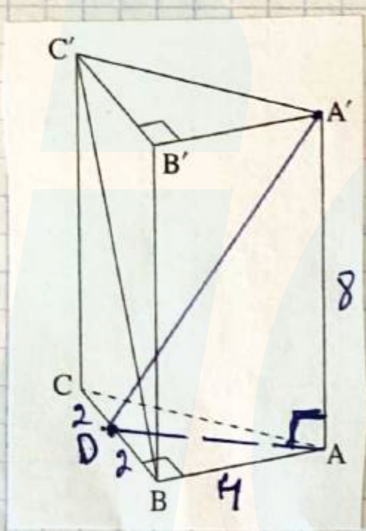

$$S_{\Delta AC'B} = \frac{AB \cdot BC'}{2}$$

$$S_{\Delta AC'B} = \frac{4 \cdot \sqrt{80}}{2} = 2\sqrt{80}$$

$$= 2\sqrt{16 \cdot 5} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{5}$$

$$= 8 \cdot \sqrt{5}$$

$$\boxed{S_{\Delta AC'B} = 8 \cdot \sqrt{5}}$$




د. بحسب معطيات البند (أ) D هي منتصف CB لذلك $2 = DB = CD$

نرسم الضلع AD وينتج لدينا المثلث $AA'D$.

نجد أولاً AD من المثلث ABD

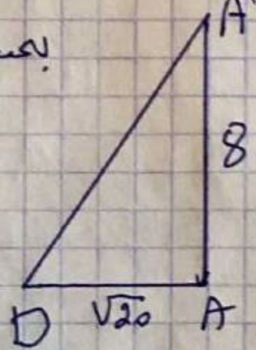
بحسب فيثاغورس في $\Delta ABD$

يتحقق :- $AB^2 + BD^2 = AD^2 \Leftarrow 2^2 + 4^2 = AD^2$

$AD^2 = 4 + 16 = 20 \rightarrow AD = \sqrt{20}$

المثلث $AA'D$ هو مثلث قائم الزاوية فيه $\measuredangle DAA'$ قائمة.

بحسب فيثاغورس يتحقق:




$$(\sqrt{20})^2 + 8^2 = A'D^2$$

$$20 + 64 = A'D^2$$

$$84 = A'D^2$$

$$\boxed{\sqrt{84} = A'D}$$

## حل سؤال 3

أ*) $f(x) = \sin 2x \quad 0 \le x \le \pi$

1. تقاطع مع المحورين

مع المحور x: $(y = 0)$

$\sin 2x = 0$

$2x = 2\pi k$ أو $2x = \pi + 2\pi k$

$\Downarrow$

دمج الحلين هو $2x = \pi k$

$x = \frac{\pi}{2} k$

في مجال التعريف المعطى

$k = 0 \rightarrow x_1 = 0$

$k = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2}$

$k = 2 \Rightarrow x_3 = \pi$

أي هنالك 3 نقاط تقاطع مع x في المجال المعطى

$(0,0) \quad (\frac{\pi}{2},0) \quad (\pi,0)$

مع المحور y: $x = 0 \Rightarrow (0,0)$

أ.2) $f'(x) = 0 \Leftarrow$ النقاط القصوى

$f'(x) = 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k \qquad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

نجد الحلول ضمن مجال تعريف الدالة:

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$k=0 \longrightarrow x_1=\frac{\pi}{4}$

$k=1 \longrightarrow x_2=\frac{5\pi}{4}$ خارج المجال

$k=-1 \longrightarrow x_3=\frac{-3\pi}{4}$ خارج المجال

$x=\frac{-\pi}{4}+\pi k$

$k=0 \longrightarrow x=\frac{-\pi}{4}$ خارج المجال

$k=1 \longrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

$k=2 \longrightarrow x=\frac{7\pi}{4}$ خارج المجال

اذا! النقاط القصوى هي: $x_1=\frac{\pi}{4}$ $x_2=\frac{3\pi}{4}$

نصنف النقاط بواسطة جدول:

| $x$ | $0$ | $0<x<\frac{\pi}{4}$ <br> $x=\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ <br> $(\frac{\pi}{2})$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $f'(\frac{\pi}{5})>0$ <br> $(+)$ | $0$ | $f'(\frac{\pi}{2})<0$ <br> $(-)$ | $0$ | $f'(\frac{4\pi}{5})$ <br> $(+)$ | |
| $f(x)$ | min | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | max |

$f'(x)=2\cos 2x$

$f'(\frac{\pi}{2})=2\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 2)<0$

$f'(\frac{\pi}{5})=2\cos(2\cdot\frac{\pi}{5})>0$

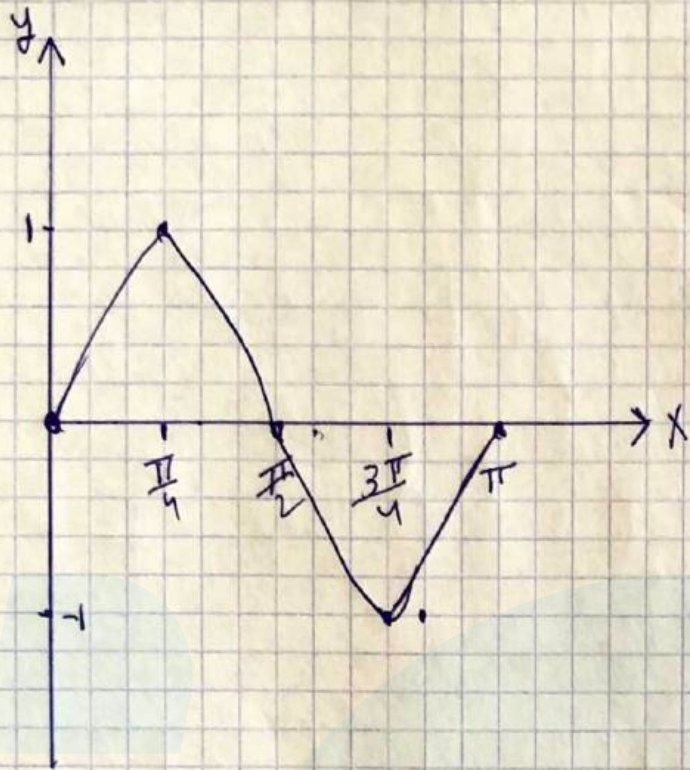
$f'(\frac{4\pi}{5})=2\cdot\cos(2\cdot\frac{4\pi}{5})>0$

$f(0)=\sin 2\cdot 0=0$ $(0,0)$ min

$f(\frac{\pi}{4})=\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ $(\frac{\pi}{4},1)$ max

$f(\frac{3\pi}{4})=\sin 2\cdot\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$ $(\frac{3\pi}{4},-1)$ min

$f(\pi)=\sin 2\pi=0$ $(\pi,0)$ max




ب) $g(x)=2\sin x$ في المجال $0\le x\le \pi$

$f(x)=\sin 2x$

تقاطع الرسمين يتحقق: $f(x)=g(x)$

$\sin 2x = 2\sin x$

$\Downarrow$

$2\sin x\cdot\cos x = 2\sin x \Rightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x\,(\cos x - 1) = 0$

أو

$2\sin x = 0$     $\cos x - 1 = 0$

$\sin x = 0$     $\cos x = 1$

$\Downarrow$     $\Downarrow$

$x = \pi k$     $x = 2\pi k$

$k=0 \quad x=0$     $k=0 \quad x=0$

$k=1 \quad x=\pi$     $k=1 \quad x=2\pi$ X

اذاً هنالك نقطتي تقاطع للرسمين $(0,0)$ و $(\pi,0)$
(أنظر الرسم أ)

ج.

بما أن الرسم البياني لـ $g(x)$ في المجال المعطى يقع فوق الرسم البياني لـ $f$ باستثناء نقاط التقاطع التي تقع في أطراف المجال لذلك المساحة المحصورة بين الدالتين هي :

$$\int_0^{\pi} [g(x) - f(x)]\, dx$$

$$\int_0^{\pi} [2\sin x - \sin 2x]\, dx =$$

$$= \left[-2\cos x - \left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \left[-2\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \left(-2\cos\pi + \frac{\cos 2\pi}{2}\right) - \left(-2\cos 0 + \frac{\cos 2\cdot 0}{2}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}\right) = 2.5 - [-1.5] = 4$$

المساحة المحصورة بين الرسمين البيانيين للدالتين هو 4 وحدات مساحة

حل سؤال 4

$f(x)=9-(\ln x)^2$

1.أ $x>0$

2.أ تقاطع $f(x)$ مع المحور $x$

(مع المحور $y$ لا يوجد لأن مجال التعريف $x>0$)

$0=9-(\ln x)^2$

$\rightarrow (\ln x)^2=9 \Longrightarrow \ln x=\pm\sqrt{9}$ ⟨ $\ln x=3$ ، $\ln x=-3$

$\ln x=3$      $\ln x=-3$

$\boxed{x=e^3}$      $x=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

$(e^3,0)$ تقاطع مع $x$

3.أ $f(x)=9-(\ln x)^2$ ← النقاط القصوى تحقق $f'(x)=0$

$f'(x)=-2(\ln x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-2}{x}\cdot\ln x=0 \Longrightarrow \ln x=0$

$\Longrightarrow x=e^0=1$

$x=1$ هي نقطة قصوى

نحدد نوعها بواسطة جدول

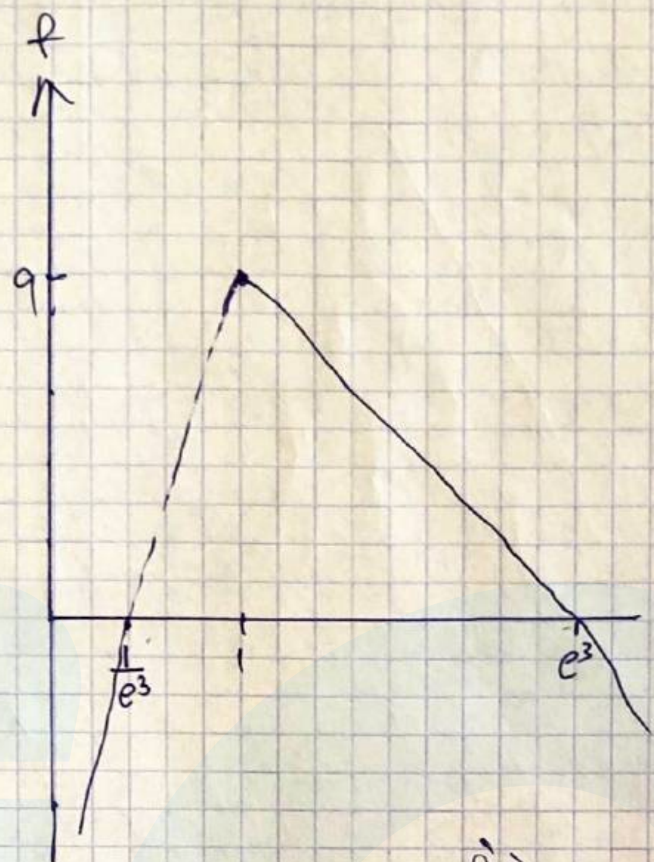
| $x$ | $0<x<1$ | $1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $f'(\frac{1}{2})>0$ | $0$ | $f'(2)<0$ |
| $f(x)$ | ↗ | max | ↘ |

$f'(\frac{1}{2})=\frac{-2\ln 0.5}{0.5}>0$

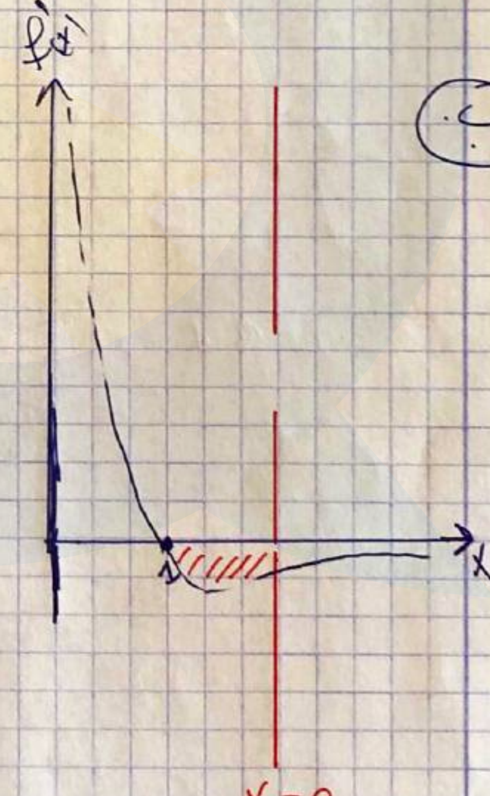
$f'(2)=\frac{-2\ln 2}{2}<0$

$f(1)=9-(\ln(1))^2=9-0=9$      $\boxed{(1,9)\,max}$

٤.أ




ب




**ملاحظة:** نقطة تقاطع الرسم البياني لـ $f'(x)$ مع المحور $x$ هي $x=1$ ← النقطة القصوى للدالة $f(x)$.

المساحة المطلوبة هي المخطط وهي:

$$S=\left|\int_1^e f'(x)\,dx\right| = \left|\left[f(x)\right]_1^e\right|$$

$$=\left|\underbrace{f(e)}_{8}-\underbrace{f(1)}_{9}\right| = \left|-1\right| = 1$$

$f(e) = 9-(\ln e)^2 = 9-1 = 8$

$f(1) = 9$ $\boxed{S=1}$

ملاحظة:
بما أن المساحة
المطلوبة تقع في
المجال السالب للدالة
لذلك نأخذ القيمة المطلقة

(أ) بحسب المعطيات المادة تتضاءل بشكل أسي

أي ان الدالة التي تُعبر عن وتيرة تضاءلها هي

$M_t = M_0 \cdot q^t$

بحيث $M_0$ هي الكمية الاولية

من المادة, اي عند لحظة البداية

و $t$ عدد السنين الذي مرّ منذ لحظة القياس.

معطى ان $M_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ و $M_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

$$M_1 = M_0 \cdot q^1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$M_5 = M_0 \cdot q^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$\frac{M_5}{M_1} = \frac{M_0 \cdot q^5}{M_0 \cdot q^1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Longrightarrow q^{5-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10-2}$$

$$q^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \Longrightarrow q = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{8}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

اذاً: $\boxed{q = \frac{1}{9}}$ اي ان وتيرة تضاؤل المادة هي $\frac{1}{9}$

نجد $M_0$

$$M_1 = M_0 \cdot q^1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = M_0 \cdot \frac{1}{9} \rightarrow \frac{1}{9} = M_0 \cdot \frac{1}{9} \Longrightarrow \boxed{M_0 = 1}$$

اي ان كمية المادة الأولية هي 1

ب) $g(x)=3^{-2x}$ المعرّفة عن $x\geq 0$

$$g(x)=3^{-2x}=\left(\frac{1}{3^2}\right)^x=\left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x$$

تقاطع مع X $(y=0)$

$0=\left(\frac{1}{9}\right)^x \Longrightarrow$ لا يوجد تقاطع مع X.

تقاطع مع Y $(x=0)$

$$g(0)=\left(\frac{1}{9}\right)^0=1$$

$(0,1)$ نقطة التقاطع مع Y.

ب.2) نجد النقط القصوى للدالة وبحسبها نحدد المجالات التصاعدية والتنازلية للدالة

$$g'(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{9}=0$$

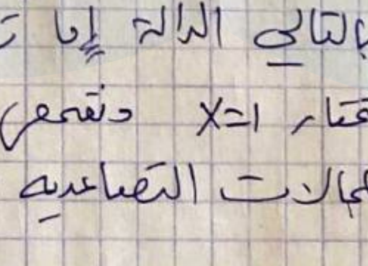
$$\left(\frac{1}{9}\right)^x=0$$

لا يوجد حل أي لا يوجد نقاط قصوى
وبالتالي الدالة إما تصاعدية أو تنازلية على كل مجال تعريفها
نختار $x=1$ ونفحص إشارة المشتقة وبحسبها نحدد المجالات التصاعدية والتنازلية:

$$g'(1)=\left(\frac{1}{9}\right)^1\cdot\ln\frac{1}{9}<0$$

لذلك الدالة g تنازلية على كل مجال تعريفها

ب.3)




ملاحظة: الدالة $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x$ هي دالة أسية أساسها $\frac{1}{9}$ لذلك هي تنازلية على كل مجال تعريفها.