حل نموذج بجروت

(807)–582

موعد شتاء 2018

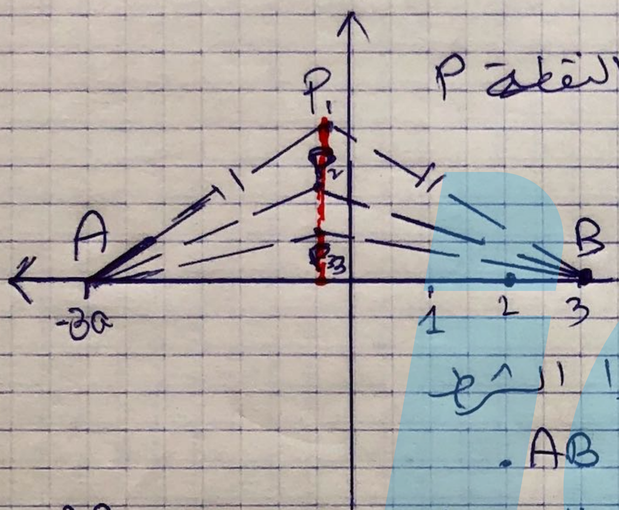
حل سؤال 1:

معطى النقطتان $A:(-3a,0)$ و $B(3,0)$ بحيث $a>0$ بارامتر

السؤال يطلب المحل الهندسي لكل النقاط P التي

تحقق أن $\frac{PA}{PB}=1$ أي $PA=PB$

تعين النقاط في هيئة محاور:



نحاول أن نحدد كيف ستتحرك النقطة P

بحيث يتحقق أن $PA=PB$

ونلاحظ اننا سنحصل كل مرة على

مثلث متساوي الساقين $PA=PB$

مجموعة النقاط P التي تحقق هذا الشرط

ستكون العمود المتوسط للضلع AB.

وبما أن AB على المحور X إذاً العمود المتوسط للضلع AB

سيكون عمودياً على المحور X اي موازٍ للمحور y ومعادلته

هي: $X=K$ بحيث K هو احداثيات منتصف القطعة AB

منتصف AB هو: $K=\frac{x_A+x_B}{2} \Leftarrow K=\frac{-3a+3}{2} \Leftarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{X=-1.5a+1.5}$$

انتبه من الممكن ان نحل السؤال بواسطة حساب طول القطعة PA

وطول القطعة PB بحيث $P=(x_p,y_p)$

$$PA=\sqrt{(x_p-(-3a))^2+(y_p-0)^2} \qquad PB=\sqrt{(x_p-3)^2+(y_p-0)^2}$$

$$\overrightarrow{PA}=\sqrt{(x_p+3a)^2+y_p^2} \qquad PB=\sqrt{(x_p-3)^2+y_p^2}$$

$$PA=PB$$

نحل المعادلة الناتجة ونحصل على نفس النتيجة..

ب -

نفرض ان احداثيات النقطة Q هي (X_Q, Y_Q)

اذا:

$$QA=\sqrt{(X_Q+3a)^2+y_Q^2}$$

$$QB=\sqrt{(X_Q-3)^2+y_Q^2}$$

ونتحقق ان $\frac{QA}{Q_B}=2$ اي $QA=2QB$

$$\longrightarrow 2\sqrt{(X_Q-3)^2+y_Q^2}=\sqrt{(X_Q+3a)^2+y_Q^2}$$

نربع الطرفين:

$$4[(X_Q-3)^2+y_Q^2]=(X_Q+3a)^2+y_Q^2$$

$$\Longrightarrow 4[X_Q^2-6X_Q+9+y_Q^2]=X_Q^2+6aX_Q+9a^2+y_Q^2$$

$$4X_Q^2-24X_Q+36+4y_Q^2=X_Q^2+6aX_Q+9a^2+y_Q^2$$

نجمع المركبات في طرف واحد من المعادلة ونقسم المعادلة على 3 ونبسط نحصل على المعادلة

$$X_Q^2-X_Q(8+2a)+12-3a^2+y_Q^2=0$$

$$X_Q^2-2X_Q(4+a)+y_Q^2=3a^2-12$$

نكمل المعادلة الى تربيع كامل:

$$X_Q^2-2X_Q(4+a)+\underbrace{(4+a)^2}+y_Q^2=\underbrace{(4+a)^2}+3a^2-12$$

اضفنا المركب لطرفي المعادلة

$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=16+8a+a^2+3a^2-12$$

$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=4a^2+8a+4=4(a^2+2a+1)$$

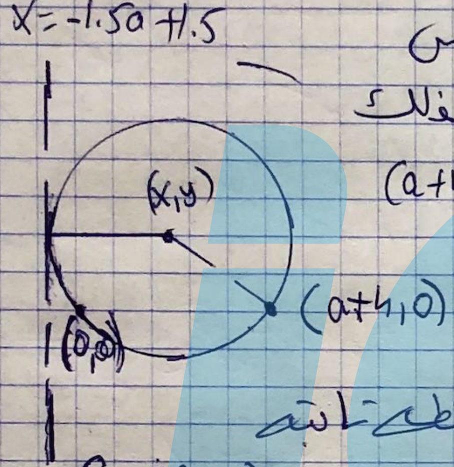
$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=2^2(a+1)^2=[2(a+1)]^2$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(4+a,0)$ ونصف قطرها $R=2(a+1)$

ج 1- المحل الهندسي في البند (أ) هو مستقيم معادلته $y=-1.5a+1.5$.

مركز الدائرة التي حصلنا عليها في البند ب هو $(4+a,0)$

الدوائر التي تمس المستقيم $x=-1.5a+1.5$ وتمر عبر مركز الدائرة التي حصلنا عليها في البند (ب) تشكل محلاً هندسيًا يمر في نقطة الأصل، تحقق الشروط التالية:



1- بما أن مجموعة الدوائر هذه تمس المستقيم وتمر بـ $(a+4,0)$ لذلك بعدها عن المستقيم وعن $(a+4,0)$ متساوي وهو R نصف قطر الدائرة ~~هو~~ البند (ب) أي أن مركز هذه الدوائر تبعد عن نقطة ثابتة ومستقيم ثابت نفس البعد وهو $R=2(a+1)$ والمحل الهندسي هذا يمر بـ $(0,0)$ ولذلك يحقق تعريف المحل الهندسي البرابولا الذي هو المحل الهندسي لكل النقاط في المستوى التي تبعد بعدًا متساويًا عن نقطة ثابتة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت (الدليل).

2. ج. في البرابولا يتحقق:
احداثيات البؤرة هي $(\frac{p}{2},0)$ ومعادلة الدليل $x=-\frac{p}{2}$
وبالتالي يتحقق:

$\frac{p}{2}=a+4$ وأيضًا $-\frac{p}{2}=-1.5a+1.5$

$\Leftarrow$ $p=2a+8$ وأيضًا $-p=-3a+3 \Leftarrow p=-3+3a$

نحل معادلتين بمتغيرين:

$2a+8=-3+3a$

$a=11 \Rightarrow \boxed{a=11}$

وعندها $p=2\cdot(11)+8 \leftarrow \boxed{p=30}$

ومعادلة البرابولا $y^2=2px \Leftarrow \boxed{y^2=60x}$

حل سؤال 2

أ- بحسب المعطيات :

$DA=4$ ، $AA'=3$

$AB=a$ بارامتر $a>0$

$AP=2PA'$, $N(0,5,0)$ $\longleftarrow$ بما أن $AP=2PA'$

L منتصف BC و $AA'=3$ لذلك :

$\vec{A'K}=\frac{4}{5}\vec{DN}$ $AP=2$ و $PA'=1$

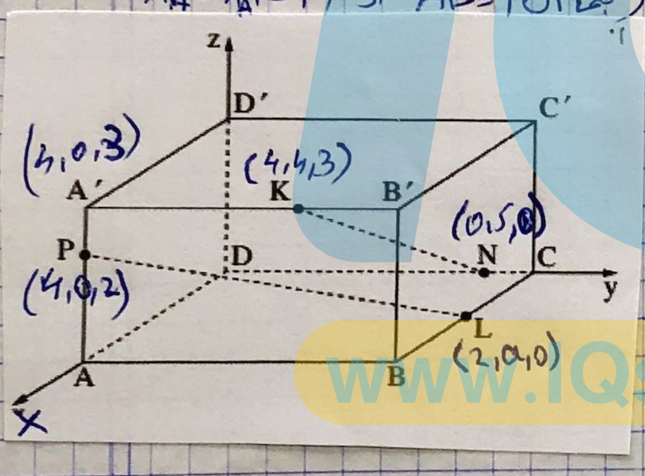
لكي نجد معادلة المستوى PNK نجد احداثيات 3 نقاط تقع على المستوى , P و N و K . معطى ان $N(0,5,0)$.

بما أن P تقع على الضلع AA' و لذلك الاحداثي x للنقطة P هو نفسه الاحداثي x للنقطة A' وبما أن $AD=4$ اذاً $x_A=x_{A'}=4$

الأحداثي y للنقطة P هو 0

وبما انه يتحقق ان $AP=2$

لذلك احداثيات P هي $P(4,0,2)$.



النقطة L منتصف BC $\longleftarrow$ $\boxed{x_L=2}$

لأن $BC=AD=4$. و L تقع بالمستوى $[XY]$

لذلك الأحداثي z لها 0 وبالتالي

احداثيات النقطة L هي $L:(2,a,0)$.

بما أن $\vec{A'K}=\frac{4}{5}\vec{DN}$ و $N(0,5,0)$ لذلك يتحقق أن $y_K=\frac{4}{5}y_N=\frac{4\cdot 5}{5}=4$

اذاً $\boxed{y_K=4}$ وبالتالي $A'(4,0,3)$ و نحصل على $K(4,4,3)$

وبهذا حصلنا على احداثيات النقاط $K(4,4,3)$ $P(4,0,2)$ $N(0,5,0)$

نجد احداثيات المتجهات $\vec{NP}$ و $\vec{NK}$

$$\vec{NP}=P-N=(4,-5,2)$$

$$\vec{NK}=K-N=(4,-1,3)$$

المتجهان $\vec{NP}$ و $\vec{NK}$ هما متجهان غير مرتبطان خطيا

ولذلك يفرشان المستوى PNK (ב.ת.ל פורשים מישור)

معادلة المستوى من الصورة

$$ax+by+cz+d=0$$

بحيث المتجه $\underline{u}=(a,b,c)$ يعامد $\vec{NP}$ و $\vec{NK}$

ولذلك يتحقق :-

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(4,-5,2)=0 \Longrightarrow 4a-5b+2c=0\\(a,b,c)\cdot(4,-1,3)=0 \Longrightarrow 4a-b+3c=0\end{cases}$$

نطرح المعادلتين نحصل على :-

$$-4b-c=0 \Longrightarrow \boxed{c=-4b}$$

نعوض $\boxed{b=1}$ ← $\boxed{c=-4}$ فنعوض ونجد a نحصل

على : $\boxed{a=\frac{13}{4}}$

وبالتالي معادلة المستوى هي:

$$\frac{13}{4}x+y-4z+d=0$$

نجد d

نعوض النقطة K(4,4,3) بالمعادلة ونحصل على

$$\frac{13}{4}\cdot 4+4-4\cdot 3+d=0 \Longrightarrow \boxed{d=-5}$$

معادلة المستوى PNK : $\frac{13}{4}x+y-4z-5=0$

ب. تمثيل برامتري للمستقيم NK :-

المتجه $\vec{NK}$ هو $\vec{NK}=(4,1,-3)$ وهو المتجه الاتجاهي

(וקטור כיוון) و بالتالي التمثيل البرامتري له هو

$$NK: \underline{x}=(0,8,0)+t(4,-1,3)$$

وبنفس الاسلوب النهج للمستقيم PL:

$$\vec{PL}=L-P=(2,a,0)-(4,0,2)=(-2,a,-2)$$

والتمثيل البرامتري للمستقيم PL هو

$$PL: x=(4,0,2)+s(-2,a,-2)$$

ب.2

المتجه الاتجاهي للمستقيم NK هو $\overrightarrow{NK}(4,-1,3)$

والمتجه الاتجاهي للمستقيم PL هو $\overrightarrow{PL}(-2,a,-2)$

وواضح أن المتجهين غير مرتبطين خطياً لذلك المستقيمين بالضرورة غير متوازيين ويبقى علينا نفحص انهما متقاطعين

نبرهن ان L لا تقع بالمستوى PNK وعندها نستنتج ان المستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين وبالتالي متخالفين.

نعوض احداثيات النقطة L بالمستوى:

$$L(2,a,0) \Rightarrow \frac{13}{4}\cdot 2 + 2a + 0 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 1.5 + 2a = 0 \rightarrow a = -\frac{3}{4} < 0$$

اذا حصلنا على a سالب وهذا يناقض معطيات السؤال ان a موجب وبالتالي L لا تقع على المستوى PNK

وبالتالي المستقيمين متخالفين.

ج.1

$$\cos\angle PC'C = \frac{|\overrightarrow{PC'}\cdot\overrightarrow{CC'}|}{|\overrightarrow{PC'}|\cdot|\overrightarrow{CC'}|}$$

$$\overrightarrow{C'P} = P - C' = (4,0,2) - (0,a,3) = (4,-a,-1)$$

$$\overrightarrow{CC'} = (0,0,1)$$

$$|\overrightarrow{C'P}| = \sqrt{4^2+(-a)^2+(-1)^2} = \sqrt{17+a^2}$$

$$|\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{0^2+0^2+1} = \sqrt{1} = 1$$

وبالتالي:

$$\cos 82.1 = \frac{|(4,0,2)\cdot(4,-a,-1)|}{\sqrt{17+a^2}\cdot(1)} = \frac{1}{\sqrt{17+a^2}}$$

$( )^2 \Downarrow$ نربع الطرفين نحصل على

$$0.01889 = \frac{1}{17+a^2}$$

$$\Rightarrow 17+a^2 = \frac{1}{0.01889} \rightarrow \dots \rightarrow a^2 = 35.935 \Rightarrow \boxed{a = 5.99 \approx 6}$$

ج.2 بما ان $\cos 90 = 0$ لذلك يجب ان يتحقق أن

$$|(4,-a,-1)\cdot(0,0,1)| = 0 \Rightarrow |-1| = 0$$

وهذا غير ممكن اي لا يوجد a يحقق المطلوب.

حل سؤال 3

أ. بحسب المعطيات Z_1 و Z_2 هما عددان مركبان

ويحققان $|Z_1|=|Z_2|=r$ وكذلك $\arg Z_1+\arg Z_2=90°$

نفرض $\arg Z_1=\theta$ إذاً $\arg Z_2=90-\theta$ وبالتالي يمكن التعبير

عن العددين Z_1 و Z_2 بالصورة القطبية كالتالي:

$$Z_1=r\,cis\,\theta \quad // \quad Z_2=r\,cis(90-\theta)$$

وعندها يتحقق:

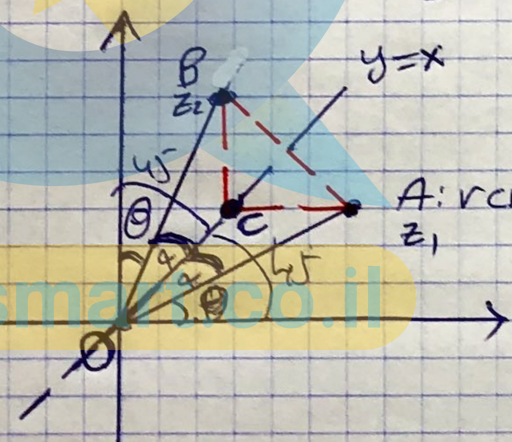
$$Z_1\cdot Z_2=r\,cis\,\theta\cdot r\,cis(90-\theta)$$

$$Z_1\cdot Z_2=r^2\,cis(\theta+(90-\theta))=r^2\,\overbrace{cis\,90}^{i}$$

حاصل الضرب عدد وهمي $\boxed{Z_1 Z_2=r\cdot i}$

ب. $A=r\,cis\,\theta$ و $B=r\,cis(90-\theta)$ نحدد النقاط A و B و C

في هيئة محاور:



بما أن النقطة B هي Z_2

فالزاوية بين المحور x والعدد Z_2

هي $90-\theta$ وبين العدد والمحور y هي θ.

المستقيم $y=x$ يصنع زاوية مقدارها $45°$

مع المحور x (بالاتجاه الموجب)

وأيضاً الزاوية بين المستقيم $y=x$

والمحور y هي $45°$ وبالتالي

ينتج أن $\triangle OCB \cong \triangle OCA$

OC مشترك

$OB=OC=r$

$\angle OCA=\angle OCB=45-\theta=\alpha$

إذاً يتطابق المثلثان حسب (ض، ز، ض)

ومن التطابق ينتج أن $BC=AC$ والمثلث ABC متساوي الساقين

1. م

$\boxed{D = z_3\,(r^2 \cdot i)^2 = -r^4 z_3} \Leftarrow D = (z_3)\cdot(z_1 \cdot z_2)^2$

ونتحقق أن :

$z_1 + z_2 = 7 + 7i$

$z_1 - z_2 = 1 - i$

بجمع المعادلتين :

$\Rightarrow 2z_1 = 8 + 6i$

$z_1 = 4 + 3i$

نجد z_2 نعوض في المعادلة $z_1 + z_2 = 7 + 7i$

$\Rightarrow 4 + 3i + z_2 = 7 + 7i \Rightarrow \boxed{z_2 = 3 + 4i}$

نحول معطى أن :- $(z_3)^2 = 2i$

$(z_3)^2 = 2i = 2cis90 \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}\, cis\frac{90 + 360k}{2}$

حسب دي موافر

$\Rightarrow z_{3_I} = \sqrt{2}\, cis45 \quad (k=0) \Rightarrow \boxed{z_{3_I} = 1 + i}$

$z_{3_{II}} = \sqrt{2}\, cis(45 + 180) = \sqrt{2}\, cis225 \quad (k=1)$

$\Rightarrow \boxed{z_{3_{II}} = -1 - i}$

إذاً للنقطة $C = z_3$ هنالك إمكانيتين :-

$C_I = (1,1) \qquad [z_3 = 1 + i \Rightarrow C:(1,1)]$

$C_{II} = (-1,-1) \qquad [z_3 = -1 - i \Rightarrow C:(-1,-1)]$

2. م نجد D :

$D = -r^4 \cdot z_3 \Rightarrow r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$D = -(5)^4 z_3 = -625\, z_3 \qquad D_1 = -625\cdot(1,1) = (-625,-625)$

$\Rightarrow D_2 = -625(-1,-1) \Rightarrow D_2(+625,+625)$

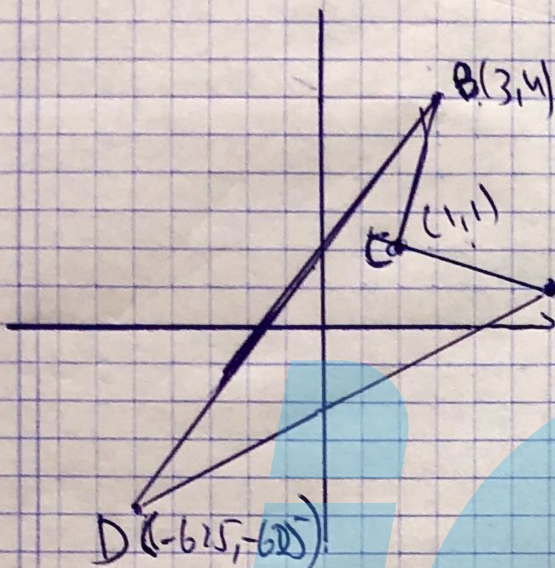
إذاً : $D_1(-625,-625) \quad D_2(625,625)$

ب 2

النقطة C بالربع الأول هي $C:(1,1)$

وعندها الرأس D الملائم هو $D:(-625,-625)$

نرسم الشكل الرباعي الناتج !



الشكل الرباعي الناتج هو دالتون

مساحة الدالتون هي $\frac{\text{حاصل ضرب الاقطار}}{2}$

نجد طول الأقطار

$$AB=\sqrt{(4-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$$

$$CD=\sqrt{(1+625)^2+(1+625)^2}=\sqrt{2\cdot 626^2}$$

$$CD=\sqrt{2}\cdot 626$$

إذاً:

$$S_{ABCD}=\frac{AB\cdot CD}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 626}{2}$$

$$\boxed{S_{ABCD}=626}$$

وحدات مساحة

حل سؤال 4

(1.P) الدالة $f(x)=e^{2mx}-e^{mx}$ بارامتر $m>0$

معرفة لكل x اي مجال تعريف الدالة هو R

(2.P) مع المحور x $\longleftarrow$ $y=0$

$0=e^{2mx}-e^{mx} \rightarrow 0=e^{mx}(e^{mx}-1)=0$

$(e^{mx}\neq 0) \Rightarrow e^{mx}-1=0 \Rightarrow e^{mx}=1=e^{0} \rightarrow \boxed{x=0}$

تقاطع مع x $(0,0)$ وهي التقاطع مع y ايضا.

(3.P) خطوط التقارب:

$$\lim_{x\to\infty}(e^{2mx}-e^{mx}) = \lim_{x\to\infty} e^{mx}(e^{mx}-1)=\infty(\infty-1)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^{2mx}-e^{mx}) = \frac{1}{e^{-2mx}}-\frac{1}{e^{mx}}=\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}=0$$

$\boxed{y=0 \text{ خط تقارب عندما } x\to-\infty}$

(4.P) النقاط القصوى للدالة

$f'(x)=2me^{2mx}-m\cdot e^{mx}=me^{mx}(2e^{mx}-1)=0$

$me^{mx}\neq 0$

لذلك $f'(x)=0$ فقط عندما يتحقق $2e^{mx}-1=0$

$\Rightarrow 2e^{mx}=1 \Rightarrow e^{mx}=\frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^{mx}=\ln 0.5$

$\Rightarrow mx=\ln 0.5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\ln 0.5}{m}} \Rightarrow x=\frac{1}{m}\cdot\ln 0.5$

$\Rightarrow x=\frac{1}{m}\cdot\ln 2^{-1}=-1\cdot\frac{1}{m}\cdot\ln 2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-\ln 2}{m}}$

نفحص النقطة

x	$x<-\frac{\ln 2}{2}$	$-\frac{\ln 2}{m}$	$x>-\frac{\ln 2}{2}$
$f'(x)$	$+\cdot- = -$	0	$+\cdot+ = +$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نجد الإحداثي y للنقطة الـ min للدالة:

$$f\left(-\frac{\ln 2}{m}\right)=e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln 2^{-1}}$$

$$=2^{-2}-2^{-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

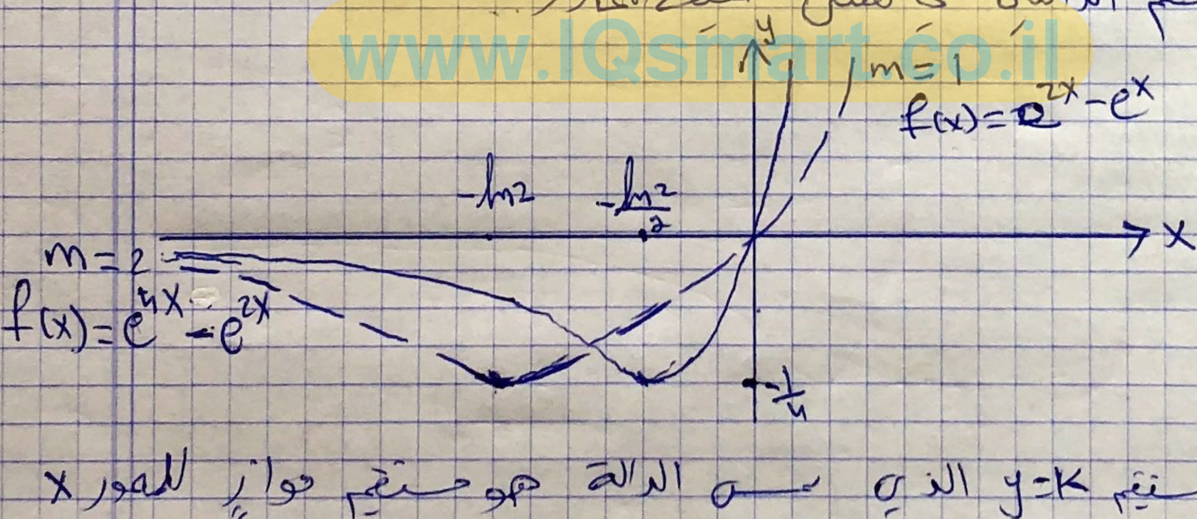
إذاً النقطة القصوى $\min\left(-\frac{\ln 2}{m},-\frac{1}{4}\right)$

ب. في حال $m=1$ فالنقطة القصوى هي $\min\left(-\ln 2,-\frac{1}{4}\right)$

والدالة هي: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

في حال $m=2$ فالنقطة القصوى: $\min\left(-\frac{\ln 2}{2},-\frac{1}{4}\right)$ والدالة هي: $f(x)=e^{4x}-e^{2x}$

نرسم الدالتين في نفس هيئة المحاور:



ج. المستقيم $y=k$ الذي يمس الدالة هو مستقيم موازٍ للمحور x وبالتالي يمس الدالة في نقطة الـ min ولذلك $k=-\frac{1}{4}$

إذاً: $S=\int_{-\frac{\ln 2}{m}}^{0}\left(e^{2mx}-e^{x}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)dx=\left[\frac{e^{2mx}}{2m}-\frac{e^{mx}}{m}+\frac{1}{4}x\right]_{-\frac{\ln 2}{m}}^{0}$

نُعيّن النقطة

x		$\frac{-\ln 2}{m}$	
$f'(x)$	$- - -$	0	$+ + +$
$f(x)$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$

نجد إحداثيات النقطة:

$$f\left(\frac{-\ln 2}{m}\right) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} = e^{\ln 2^{-2}} - e^{\ln 2^{-1}}$$

$$= 2^{-2} - 2^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

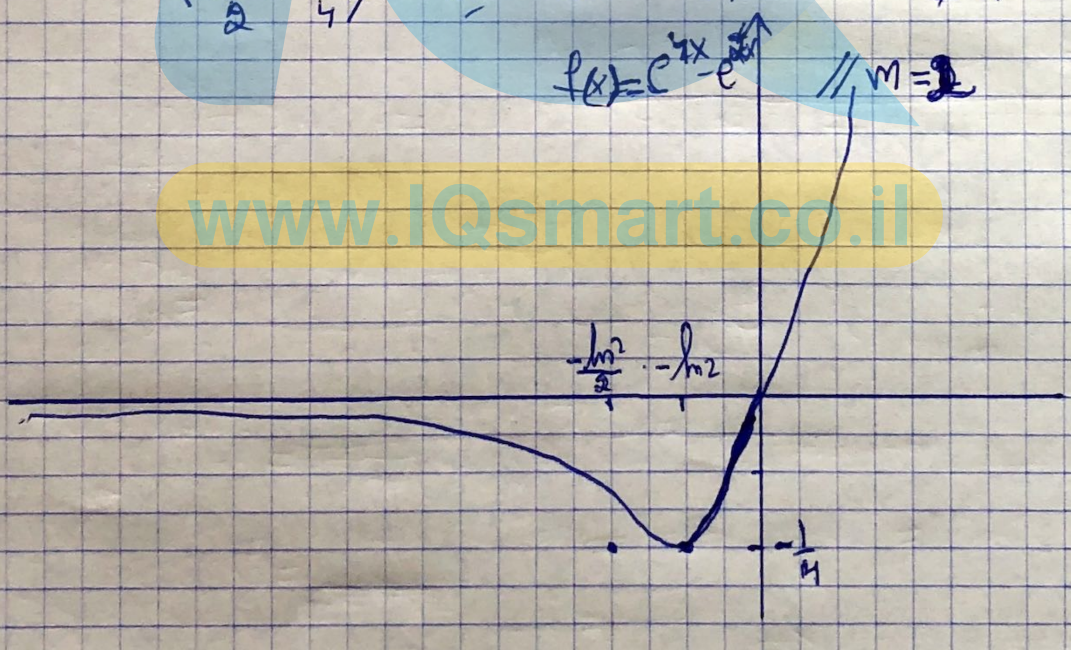
إذاً: $min\left(\frac{-\ln 2}{m}, -\frac{1}{4}\right)$

ج. في حال $m=1$ الدالة هي $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

وإحداثيات النقطة القصوى هي: $min\left(-\ln 2, -\frac{1}{4}\right)$

في حال $m=2$ الدالة هي $f(x)=e^{4x}-e^{2x}$

وإحداثيات النقطة القصوى هي: $min\left(\frac{-\ln 2}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



$$= \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{m} - 0\right) - \left(\frac{e^{-2\ln 2}}{2m} - \frac{e^{-\ln 2}}{m} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln 2}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{m} - \frac{0.25}{2m} + \frac{0.5}{m} + \frac{\ln 2}{4m}$$

$$= \frac{1}{2m} - \frac{1}{m} - \frac{1}{8m} + \frac{1}{2m} + \frac{\ln 2}{4m}$$

$$= \frac{4-8-1+4}{8m} + \frac{\ln 2}{4m} = \frac{-1}{8m} + \frac{\ln 2}{4m}$$

إذاً المساحة المطلوبة $\boxed{S = \frac{2\ln 2 - 1}{8m}}$

2 ب

$S_m \overset{?}{=} \frac{S_1}{m}$ لكل m

من الفرع السابق $\rightarrow S_1 = \frac{2\ln 2 - 1}{8}$ بالنسبة ل $m=1$ نحصل

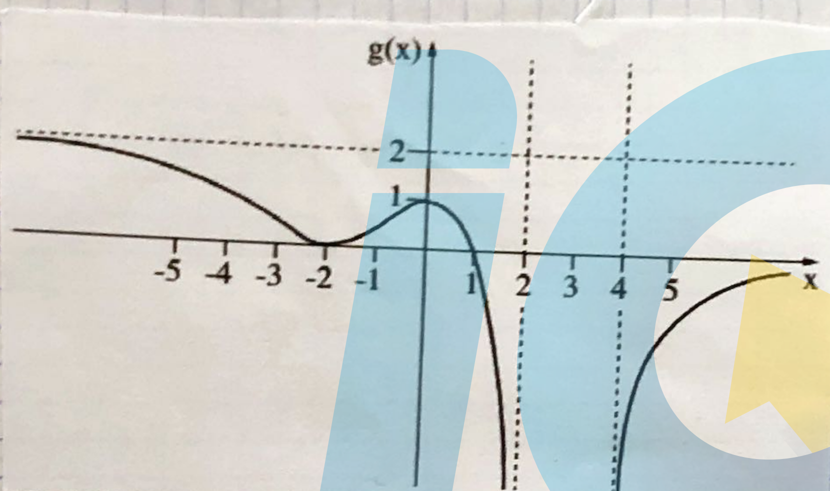
$$\frac{S_1}{m} = \frac{\frac{2\ln 2 - 1}{8}}{m} = \frac{2\ln 2 - 1}{8m} = S_m$$

إذاً $\frac{S_1}{m} = S_m$ لكل m.

حل سؤال 5

بحسب المعطيات نفهم أن:

* الدالة $f(x)$ معرفة لكل x.
* الدالة $g(x)$ معرفة كالتالي $g(x)=\ln f(x)$
* مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو $x>4$ أو $x<2$
* في المجال $2\leq x\leq 4$ نارين $f'(x)=0$ فقط في النقطة $x=3$.
* النقاط الصفرية للدالة $g(x)$ هي $x=1$, $x=-2$



أ- $g(-2)=0$ من الرسم

لذلك:

$g(-2)=\ln f(-2)=0$

$\rightarrow f(-2)=e^0=1$

$\boxed{f(-2)=1}$

$g(0)=1$

$g(0)=\ln f(0)=1$

$\rightarrow f(0)=e^1=e$

$\boxed{f(0)=e}$

$g(1)=0 \rightarrow \ln f(1)=0$

$\rightarrow f(1)=e^0=1$

$\boxed{f(1)=1}$

ب- الدالة $\ln f(x)$ معرفة لكل x تكون فيه $f(x)>0$

وبما أن $g(x)=\ln f(x)$ معرفة في المجال $x>4$ او $x<2$

لذلك هذا هو المجال الموجب لـ $f(x)$

وبما ان $f(x)$ معرفة لكل x لذلك المجال السالب

لها هو المجال الذي فيه $g(x)$ غير معرفة أي $2<x<4$

اذاً المجال الموجب لـ f هو $x>4$ او $x<2$

المجال السالب لـ f هو $2<x<4$

ج. الدالة $f(x)$ معرفة لكل x ولذلك بحسب البنود السابقة استنتجنا أن: $f(0)=e$ ولذلك التقاطع مع y سيكون بالنقطة $(0,e)$

التقاطع مع x سيكون في النقاط التي فيها للدالة $g(x)$ خطوط تقارب اي $x=2$ و $x=4$ هي نقطة صفرية لـ f لانه عندها سيتحقق:-

$g(2)=\ln f(2)=\ln 0 \longrightarrow$ غير معرف

$g(4)=\ln f(4)=\ln 0 \longrightarrow$ غير معرف

وبالتالي نقاط التقاطع مع x هي $(2,0)$ $(4,0)$

د) بحسب رسم الدالة g يتحقق:-

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln f(x)=2$ خط التقارب الافقي لـ g $x\to-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^2 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=e^2 \\ x\to-\infty \end{matrix}}$ خط تقارب للدالة f في $x\to-\infty$

بنفس الاسلوب - خط التقارب الافقي للدالة $g(x)$ عندما $x\to+\infty$ بحسب الرسم نتحقق:-

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x)=0$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^0=1$

إذا خط التقارب الافقي لـ $f(x)$ عندما $x\to\infty$ هو $\boxed{\begin{matrix} y=1 \\ x\to\infty \end{matrix}}$

هـ:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Longrightarrow g'(x) \cdot f(x) = f'(x)$$

أي أنه إشارة $f'(x)$ تحدد حسب إشارة حاصل ضرب $f(x)$ بـ $g'(x)$

من البند (ب) استنتجنا أن:

المجالات الموجبة لـ $f(x)$ هي $x > 4$ أو $x < 2$

المجالات السالبة لـ $f(x)$ هي $2 < x < 4$

وحسب الرسم البياني للمشتقة $g'(x)$:

المجال الموجب لـ $g'(x)$ هو: $x < -2$ أو $-2 < x < 1$

المجال السالب لـ $g'(x)$ هو: $1 < x < 2$ أو $x > 4$

النقاط الصفرية لـ g' هي $x = -2$ // $x = 1$

النقاط الصفرية لـ f هي $(2,0)$ // $(4,0)$

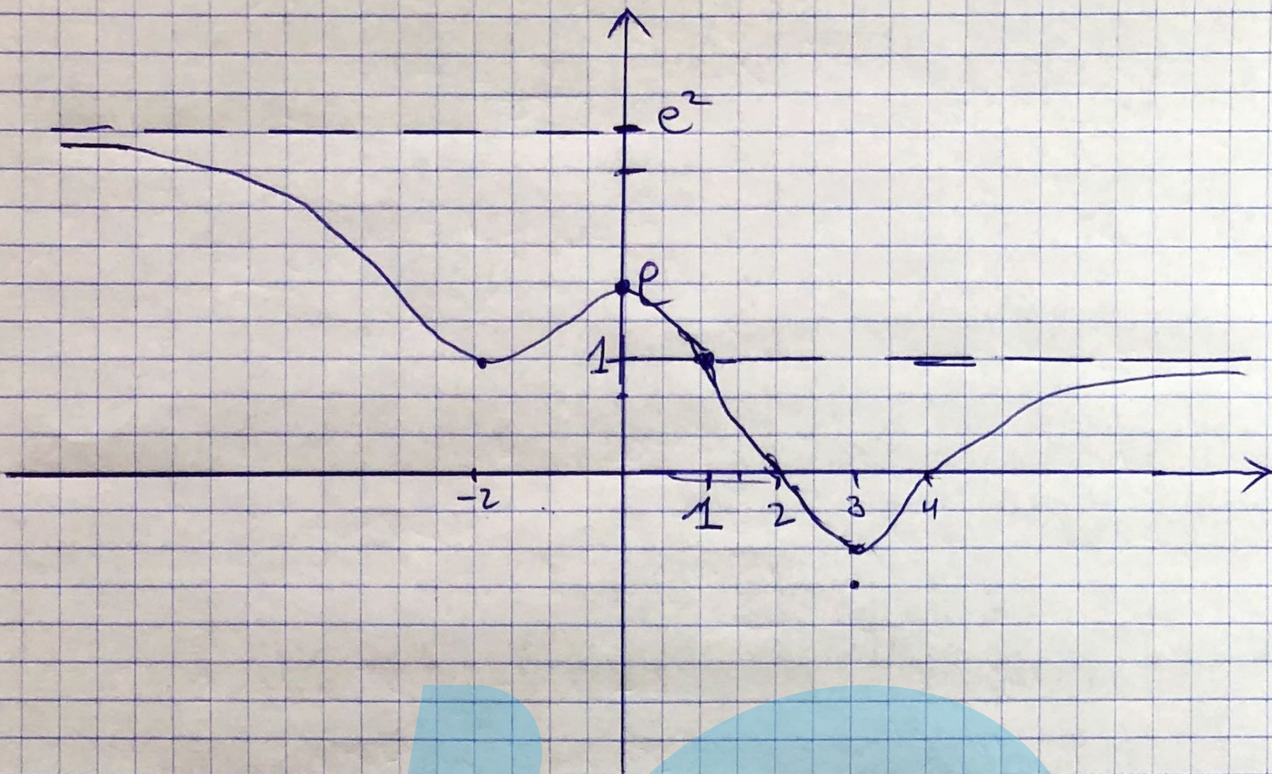
ومن معطيات السؤال $x = 3$ هي النقطة الصفرية الوحيدة لـ $f'(x)$

وبالتالي نبني جدول بحسب المجالات الموجبة والسالبة والنقاط الصفرية ونفحص إشارات الدوال هناك بحسب التحليل السابق:

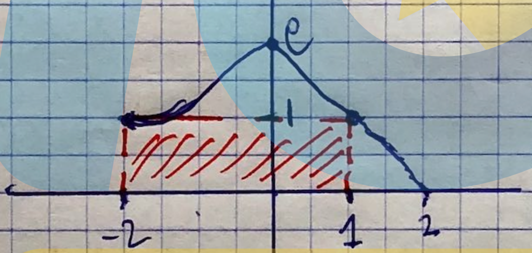
x		-2		0		2		3		4	
g	↘	min	↗	max	↘	$\varnothing$	←$\varnothing$→	$\varnothing$	←$\varnothing$→	$\varnothing$	↗
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	$\varnothing$	←$\varnothing$→	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$+$
f	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g' \cdot f = f'$	$(+ \cdot -)$ $-$	0	$+$	0	$-$			0			$+$
f	↘	min	↗	max	↘	0	↘	min	~~min~~ ↗		↗

بما أن $f'(3) = 0$ والدالة $f(x)$ في المجال $0 < x < 2$ موجبة وفي $2 < x < 3$ سالبة أي أن $f(x)$ تنتقل من سالبة إلى موجبة، ومن ثم في المجال $3 < x < 4$ سالبة لذلك $x = 3$ min لـ f وبالتالي في المجال $3 < x < 4$ f تصاعدية

و



أ) نرسم الدالة $f(x)$ في المجال $-2\le x\le 1$ ونشرح بواسطته $\int_{-2}^{1} f(x)dx$



مساحة المستطيل المخطط هي $3\cdot 1=3$

بما ان الدالة موجبة في المجال $-2\le x\le 1$ لذلك $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

يعبر عن المساحة بين الدالة والمحور x في هذا المجال

وبما انه بحسب الرسم المساحة اكبر من المستطيل المخطط

لذلك $\int_{-2}^{1} f(x)dx>3$