حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد شتاء 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل نموذج 382 - شتاء 2018

حل سؤال 1

أ. نفرض أن سعر الكرسي الأولي قبل التخفيض X إذن سعر الطاولة 2X

بعد التخفيض:

التخفيض على الكرسي كان بنسبة 25% لذلك سعره الجديد 75%X

التخفيض على الطاولة كان بنسبة 15% لذلك سعرها الجديد 85%2X

ثمن 3 كراسي بعد التخفيض $3\cdot(75\%X) \leftarrow 3\cdot(0.75X) \leftarrow 2.25X$

ثمن طاولة واحدة بعد التخفيض هو $2\cdot 0.85X \leftarrow 1.7X$

المبلغ الكلي الذي دفعه أكرم مقابل طاولة و 3 كراسي بعد التخفيض

هو 1343. أي يتحقق: $1343 = 2.25X + 1.7X$

$1343 = 3.95X \rightarrow \frac{1343}{3.95} = X \rightarrow \boxed{340 = X}$

إذاً سعر الكرسي قبل التخفيض هو $\boxed{340 \text{ شيكل}}$

وبالتالي سعر طاولة قبل التخفيض هو $2\cdot 340 \leftarrow$ $\boxed{680 \text{ شيكل}}$

وبعد التخفيض سعر الكرسي هو 0.75X أي $0.75\cdot 340 = 255$ شيكل

وسعر الطاولة بعد التخفيض هو $0.85\cdot 680 = 578$ شيكل

ب. قبل حملة المبيعات كان أكرم من المفروض أن يدفع:

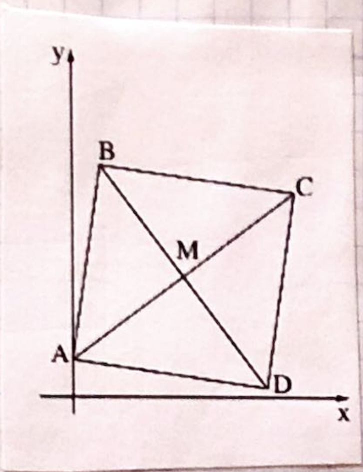
$\underbrace{340\cdot 3}_{\text{ثمن 3 كراسي} \; 1020} + 680 = 1700$ شيكل

بعد التخفيض دفع 1343

لذلك المبلغ الذي تبقى معه هو $1700 - 1343 = 357 \Leftarrow 357$ شيكل

أي أن المبلغ الذي بقي معه (357) وهذا أكبر من سعر كرسي الذي سعره 255 شيكل (بعد التخفيض) وهذا يكفيه لشراء كرسي إضافي.

حل سؤال 2



أ.1) حسب المعطيات معادلة القطر AC هي

$y=\frac{3}{4}x+4$

النقطة A تقع على المحور y ولذلك $x_A=0$

نعوض في معادلة المستقيم $x=0$ ونجد y

$y=\frac{3}{4}\cdot 0+4=4 \Longrightarrow \boxed{A(0,4)}$

أ.2) حسب المعطيات $x_C=24$ ؛ نعوض في معادلة AC ونجد y

$y=\frac{3}{4}\cdot 24+4=18+4=22$

اذاً $\boxed{C:(24,22)}$

ب.1) أقطار المربع متعامدة ولذلك ميل $BD=\frac{-1}{\text{ميل } AC}=\frac{-1}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$

$\boxed{\text{اذاً ميل BD هو } -\frac{4}{3}.}$

ب.2) لكي نجد معادلة BD نحن بحاجه لنقطة على BD.

هذه النقطة هي M التي هي منتصف AC

A(0,4) $\quad x_m=\frac{x_A+x_C}{2} \quad y_m=\frac{y_A+y_C}{2}$

C:(24,22) $\quad x_m=\frac{0+24}{2}=12 \quad y_m=\frac{4+22}{2}=13$

$\boxed{x_m=12} \quad \boxed{y=13}$

$\boxed{M(12,13)}$

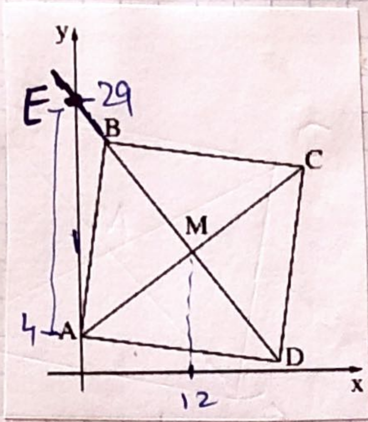
اذاً ميل BD هو $-\frac{4}{3}$ ويمر ب M(12,13) نعوض في الصورة

العامة لمعادلة مستقيم: $y=mx+n$

$13=-\frac{4}{3}\cdot 12+n \rightarrow 13=-16+n \rightarrow 13+16=n$

$\boxed{29=n}$

اذاً معادلة BD هي $\boxed{BD: y=-\frac{4}{3}x+29}$



ج. نمدّ BD على استقامته حتى يقطع المحور y . E هي نقطة تقاطع BD مع المحور y لذلك هي من الصورة $E(0,y_E)$ نعوض $x=0$ في معادلة BD

$$y = \frac{-4}{3}\cdot 0 + 29 = 29$$

إذاً $E(0,29)$

نحسب أطوال أضلاع المثلث AME: BM , AM , AE

$M(12,13)$

$A(0,4)$

$E(0,29)$

$AE = 29 - 4 = 25$ (AE يقع على المحور y)

$$AM = \sqrt{(12-0)^2+(13-4)^2} = \sqrt{12^2+9^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225}$$

$$\boxed{AM = \sqrt{225} = 15}$$

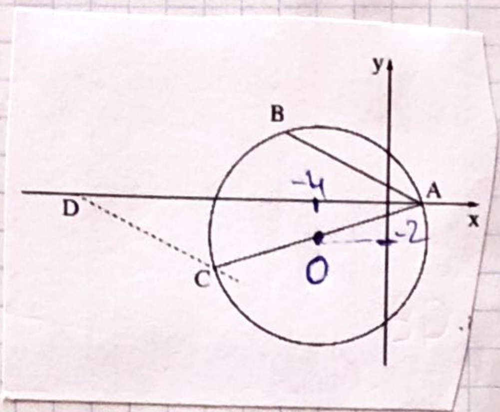
$$EM = \sqrt{(12-0)^2+(13-29)^2} = \sqrt{12^2+(-16)^2} = \sqrt{144+256}$$

$$EM = \sqrt{400} = 20$$

إذاً محيط المثلث AME هو:

$$AM + ME + AE = 15 + 20 + 25 = 60$$

حل سؤال 3



أ) بحسب المعطيات معادلة الدائرة هي:

$$(x+4)^2+(y+2)^2=40$$

A على المحور x لذلك $A(x_A,0)$

نعوض $y=0$ في معادلة الدائرة

$$(x+4)^2+(0+2)^2=40$$

$$(x+4)^2+\underbrace{2^2}_{4}=40 \Longrightarrow (x+4)^2+4-40=0$$

$$\Longrightarrow x^2+8x+16+4-40=0 \Longrightarrow x^2+8x-20=0$$

هذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور

نحصل على $\boxed{x_1=2}$ و $\boxed{x_2=-10}$

ولكن بما أن A تقع على الجزء الموجب من المحور x

لذلك $A(2,0)$

ب) $B(-6,4)$ نعوض إحداثيات النقطة B في معادلة الدائرة:

ونفحص هل تتحقق:

$$(-6+4)^2+(4+2)^2 \overset{?}{=} 40$$

$$(2)^2+(6)^2=40$$

$$4+36 \overset{?}{=} 40 \Longrightarrow 40=40$$

إذاً حصلنا على أن النقطة B تحقق معادلة الدائرة.

ج) يمكننا إستنتاج إحداثيات مركز الدائرة من معادلة الدائرة: بما أن معادلة الدائرة هي $(x+4)^2+(y+2)^2=40$

إذاً مركز الدائرة $O(-4,-2)$

O هي منتصف AC لذلك

$A(2,0)$ $\quad x_O=\frac{x_A+x_C}{2} \longrightarrow {}^{*2}/-4=\frac{2+x_C}{2}/{}^{*2} \longrightarrow -8=2+x_C \longrightarrow \boxed{-10=x_C}$

$O:(-4,-2)$ $\quad y_O=\frac{y_A+y_C}{2} \longrightarrow {}^{2*}/-2=\frac{0+y_C}{2}/{}^{*2} \longrightarrow \boxed{-4=y_C}$

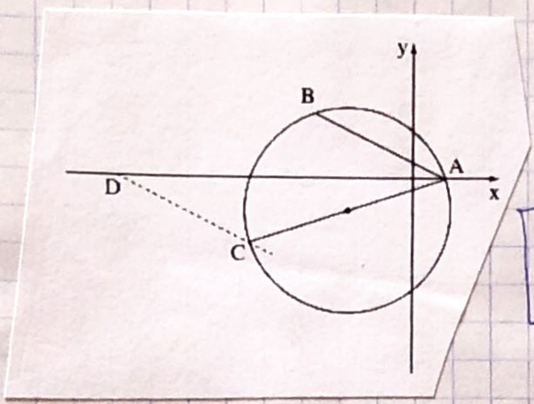
$\boxed{C:(-10,-4)}$

د) بحسب المعطيات DC يوازي AB

من هنا: ميل DC = ميل AB

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = ميل AB ← $B:(-6,4)$ $A:(2,0)$

ميل AB $= \frac{4-0}{-6-2} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$



اذا ميل DC هو $-\frac{1}{2}$. وكذلك DC يمر بـ $C:(-10,-4)$

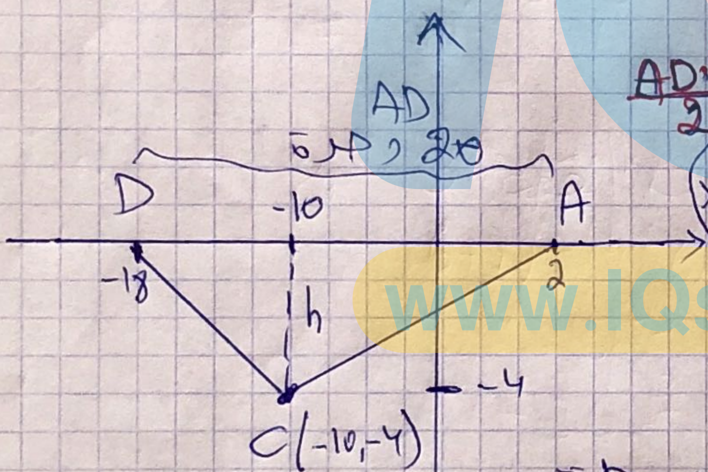
نعوض في الصورة العامة لمعادلة مستقيم $y=mx+n$

$-4 = -\frac{1}{2}\cdot(-10) + n \longrightarrow -4 = 5 + n \longrightarrow \overbrace{-4-5}^{-9} = n$

اذا معادلة المستقيم DC هي:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 9}$$

هـ) مساحة المثلث ADC $\frac{AD\cdot h}{2}$



$h=4 \Leftarrow$ (النقطة C تبعد عن المحور X 4 وحدات)

لكي نجد طول AD يجب ان نجد احداثيات D

ومن ثم نحسب AD . النقطة D تقع على المحور X لذلك هي من الصورة $D(x_D,0)$

نعوض في معادلة DC ونجد x_D:

$DC: y = -\frac{1}{2}x + 9 \Longrightarrow 0 = -\frac{1}{2}x - 9 \Longrightarrow \frac{1}{2}x = -9$

$\boxed{x=-18}$ اذا $\boxed{D:(-18,0)}$

وبالتالي طول AD هو: $2-(-18)=20$

$S_{\Delta ADC} = \frac{\overset{20}{AD}\cdot\overset{4}{h}}{2} = 40$

اذا مساحة المثلث ADC هي 40

حل سؤال 4

$$f(x)=4x+\frac{16}{x}$$

أ) مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $x\neq 0$

ب) نجد النقاط القصوى اولاً: $f'(x)=$

$$f'(x)=4+\frac{(-16)}{x^2}=4-\frac{16}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x)=4-\frac{16}{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 4-\frac{16}{x^2}=0 \rightarrow \frac{16}{x^2}=4 \rightarrow 16=4x^2$$

$$\rightarrow \frac{16}{4}=x^2 \rightarrow 4=x^2 \rightarrow \pm\sqrt{4}=x \quad \boxed{x_1=2} \quad \boxed{x_2=-2}$$

نصنف النقاط:

x	$x=-3$ $x<-2$	-2	$x=-1$ $-2<x<0$	0	$x=1$ $0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$f'(-3)>0$ +	0	$f'(-1)<0$ −		$f'(1)<0$ −		$f'(3)>0$ +
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

$$f'(-3)=4-\frac{16}{(-3)^2}=4-\frac{16}{9}>0 \qquad f'(1)=4-\frac{16}{(1)^2}=4-16<0$$

$$f'(-1)=4-\frac{16}{(-1)^2}=4-16<0 \qquad f'(3)=4-\frac{16}{3^2}>0$$

اذاً $x=-2$ מקסימום ← نجد y $\quad f(x)=4x+\frac{16}{x}$

$x=2$ מינימום

$$f(-2)=4\cdot(-2)+\frac{16}{-2}=-8-8=-16 \Rightarrow (-2,-16)$$

$$f(2)=4\cdot 2+\frac{16}{2}=8+8=16 \Rightarrow (2,16)$$

اذاً $(-2,-16)$ מקסימום $\quad$ $(2,16)$ מינימום

ويمكن استنتاج نوع النقاط من الرسم أيضاً

ج.1 ميل المماس للدالة في $x=4$ هو ؟ $f'(4)=?$ $\left(f'(x)=4-\frac{16}{x^2}\right)$

$$f'(4)=4-\frac{16}{4^2}=4-\frac{16}{16}=4-1=3$$

ج.2 نقطة التماس هي $(4,y)$ نعوض بالدالة ونجد y

$$f(4)=4\cdot 4+\frac{16}{4}=16+4=20$$

اذاً ميل المماس هو 3 ونقطة التماس هي $(4,20)$

معادلة المماس هي من الصورة $y=mx+n$

$$20=3\cdot 4+n \longrightarrow 20=12+n \longrightarrow 20-12=n$$

$$\boxed{: y=3x+8} \Longleftarrow \boxed{8=n}$$

ت.1 في البند (ب) وجدنا ان نقطة الرأس العظمى (max) هي $(-2,-16)$. في النقطة العظمى ميل المماس هو 0

لذلك معادلة المماس في نقطة الـ max هي

$$-16=0\cdot(-2)+n \longrightarrow -16=n$$

$\boxed{\text{اذاً معادلة } y=-16}$

ت.2 معادلة المماسين هي: $y=-16$ // $y=3x+8$

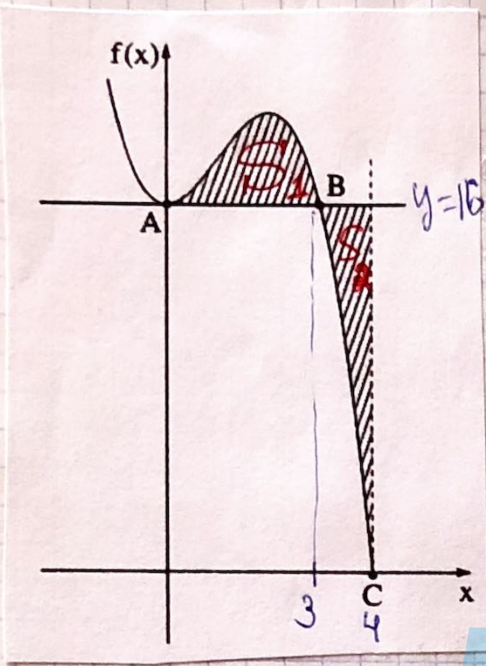
$$-16=3x+8 \Longrightarrow -16-8=3x$$

$$-24=3x$$

$$\boxed{-8=x}$$

اذاً نقطة تقاطع المماسين $(-8,-16)$

حل سؤال 5



$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 16$$

(أ) نقطة التقاطع مع المحور y ← $x=0$

$f(0) = -0^3 + 3\cdot 0^2 + 16 = 16$

إذاً $A(0,16)$

(ب) المستقيم الموازي للمحور x ميله 0

لذلك معادلته من الصورة $y = 0x + n$

نعوض احداثيات A في معادلة المستقيم

نحصل على: $16 = 0\cdot 0 + n$ ← $\boxed{16 = n}$

لذلك معادلته $\boxed{y = 16}$

(ج) بما أنَّ B تقع على المستقيم $y=16$

لذلك إحداثياتها $(x_B, 16)$:

نعوض $y=16$ في الدالة ونجد x_B.

$16 = -x^3 + 3x^2 + 16 \rightarrow 16 - 16 = -x^3 + 3x^2$

$\Rightarrow 0 = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow 0 = x^2(-x+3)$

وهذه المعادلة عبارة عن حاصل ضرب عددين x^2 و $(-x+3)$

وبما أنَّ حاصل ضربهم هو 0 إذاً إما $x^2 = 0$ او $-x+3 = 0$

$\boxed{3 = x}$ $\boxed{x = 0}$

وبالتالي $B:(3,16)$ لأنه بحسب الرسم x_B موجب.

(د) المساحة المخططة تتألف من مساحتين - الأولى S_1 والثانية S_2

$S_1 = \int_0^3 f(x) - 16\,dx$ و $S_2 = \int_3^4 16 - f(x)\,dx$ (أنظر الرسم)

$S_1 = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2 + \cancel{16} - \cancel{16})\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_0^3 = \left[\frac{-3^4}{4} + 3^3\right] - \left(\frac{0^4}{4} - 0\right)$

$$\Longrightarrow \left(-\frac{81}{4}+27\right)-0 = 6.75 \Longrightarrow S_1 = 6.75$$

$$S_2 = \int_3^4 16-(-x^3+3x^2+16)\,dx = \int_3^4 16+x^3-3x^2-\cancel{16}\,dx$$

$$= \int_3^4 (x^3-3x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{4}-x^3\right]_3^4 =$$

$$\left[\frac{4^4}{4}-4^3\right]-\left[\frac{3^4}{4}-3^3\right] = 0-(-6.75) = 6.75$$

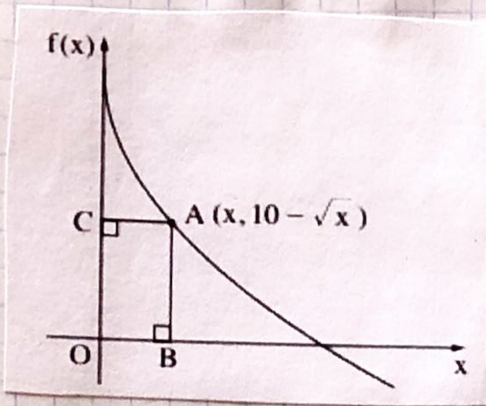
$$\boxed{S_2 = 6.75}$$

المساحة المطلوبة $= S_1+S_2 = 6.75+6.75 = 13.5$

$\boxed{\text{المساحة المطلوبة} = 13.5}$

حل سؤال 6

$$f(x)=10-\sqrt{x}$$



أ - محيط المستطيل $= 2AB + 2\cdot OB$

$AB=10-\sqrt{x}$ طول AB هو الإحداثي y لـ A

$$OB = x$$

إذاً الدالة التي تعبر عن محيط المستطيل هي :-

$$f(x) = 2\cdot AB + 2\cdot OB = 2(10-\sqrt{x})+2x$$

$$f(x) = 20-2\sqrt{x}+2x$$

نجد متى يكون محيط المستطيل أصغر ما يمكن أي $f'(x)=0$

$$f'(x) = 0-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+2 = \frac{-1}{\sqrt{x}}+2 \Longrightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}}+2$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}}+2=0 \Longrightarrow 2=\frac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow 2\sqrt{x}=1$$

نضرب بـ $\sqrt{x}$

$$\Longrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

نفحص النقطة بواسطة جدول

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

$$f'\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{8}}}+2=-0.828<0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+2=0.585>0$$

$\boxed{x=\frac{1}{4}\ \text{min}}$

ب - لكي نجد المحيط نعوض $x=\frac{1}{4}$ بالدالة $f\left(\frac{1}{4}\right)=?$

$$f(0.25)=20-2\cdot\sqrt{0.25}+2\cdot(0.25)=20-2\cdot 0.5+\frac{1}{2}=19.5$$

إذاً محيط المستطيل الأصغر ما يمكن هو 19.5