حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد (أ)-صيف 2018

www.IQsmart.co.il

معهد IQ

سؤال 1

$a_{n+1} = a_n + 3 \qquad a_1 = 0$ بحيث المعطيات

$b_n = a_n + a_{n+1}$

1.P

$b_n = a_n + a_{n+1}$

$a_{n+1} = \boxed{a_n + 3}$

$b_n = a_n + a_n + 3 = 2a_n + 3$

$$\boxed{b_n = 2a_n + 3}$$

2.P لكي نبرهن ان b_n حسابية يجب ان نبرهن أن الفرق بين أي حدين متتاليين هو مقدار ثابت، اي:-

مقدار ثابت $= b_{n+1} - b_n$

$b_n = 2a_n + 3$

$b_{n+1} = 2a_{n+1} + 3$

$b_{n+1} - b_n = (2a_{n+1} + 3) - (2a_n + 3)$

$\boxed{a_{n+1} = a_n + 3}$

$b_{n+1} - b_n = [2(a_n + 3) + 3] - (2a_n + 3)$

$= (2a_n + 6 + 3) - (2a_n + 3)$

$= 2a_n + 9 - 2a_n - 3 = 6$

$$\boxed{b_{n+1} - b_n = 6}$$ إذاً:

والفرق بين اي حدين متتاليين في المتوالية b_n هو 6 اي المتوالية حسابية.

نجد b_1

$a_1=0$ ، $b_n=2a_n+3$

أ) لما أن:

$b_1=2a_1+3$

$b_1=2\cdot 0+3=3$

$\boxed{b_1=3}$

فرق المتوالية هو 6 (من البند السابق).

إذاً حدودها العام المتوالية b_n هو

$b_n=b_1+(n-1)d$

$b_n=3+(n-1)\cdot 6=3+6n-6$

$\boxed{b_n=6n-3}$

ب.1

بمعنى أن $b_1+b_m=120$

$b_m=6m-3$

وبالتالي:

$\underbrace{b_1}_{3}+6m-3=120$

$\rightarrow 6m=120 \rightarrow \boxed{m=\frac{120}{6}=20}$

ب.2 مجموع حدود المتوالية من الحد b_{m+1} إلى الحد b_{2m} هو

بما أن $m=20$ إذاً المجموع المطلوب هو مجموع الحدود من الحد الـ 21 إلى الحد الـ 40 (2.20)

$\boxed{S_n=\frac{n}{2}[2b_1+(n-1)d]}$ ، $S_{40}-S_{20}$

وهذا المجموع عبارة عن:

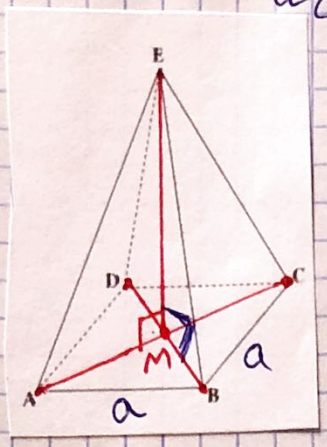
$\rightarrow S_{40}-S_{20}=\frac{40}{2}[2\cdot 3+(40-1)\cdot 6]-\frac{20}{2}[2\cdot 3+(20-1)\cdot 6]$

$S_{40}-S_{20}=20\underbrace{[6+39\cdot 6]}_{2400}-10\underbrace{[6+19\cdot 6]}_{120}=4800-1200$

$\boxed{S_{40}-S_{20}=3600}$

www.IQsmart.co.il

سؤال 2

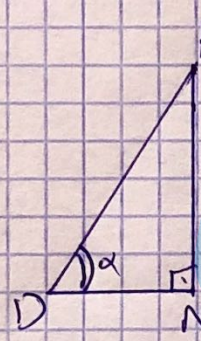


نعتبر المخروط القائم قاعدته مربع طول ضلعه a ونعطى ان ارتفاع الهرم مساوٍ لقطر قاعدته.

تذكير: ارتفاع الهرم EM هو المستقيم الذي يصل بين رأس الهرم E ونقطة التقاء أقطار القاعدة لذلك M هي نقطة التقاء أقطار القاعدة

1. مطلوب حساب الزاوية بين ضلع جانبي وقاعدة الهرم.

نأخذ اي ضلع جانبي من الأضلاع ED او EC أو EB أو EA ونحدد الزاوية بينه وبين القاعدة (لا يهم اي ضلع نختار لان الزوايا كلها متساوية). نختار الضلع ED. والزاوية بين القاعدة والضلع ED هي $\widehat{EDM}=\alpha$



بحسب معطيات السؤال $AC=BD=EM$

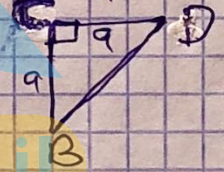
نجد BD (حيث $DM=\frac{BD}{2}$).

في المثلث BDC نتحقق:

$$BD^2=DC^2+BC^2$$

$$\rightarrow BD^2=a^2+a^2=2a^2$$

$$\boxed{BD=\sqrt{2}\cdot a}$$



وبالتالي $\boxed{EM=\sqrt{2}a}$ و $\boxed{DM=\frac{\sqrt{2}\cdot a}{2}}$

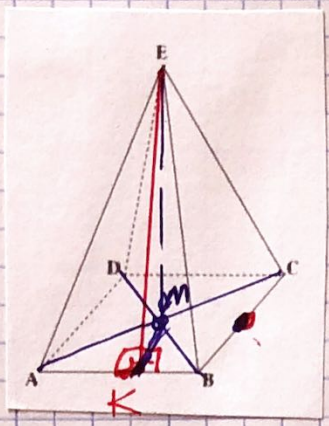
في ΔEDM نتحقق:

$$tg\alpha=\frac{EM}{DM}=\frac{\sqrt{2}a}{\frac{\sqrt{2}a}{2}}=\cancel{\sqrt{2}a}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}a}}=2$$

$$tg\alpha=2 \longrightarrow \alpha=63.435^\circ$$

$\boxed{63.435^\circ}$ إذا الزاوية بين ضلع جانبي في الهرم والقاعدة هي

www.tqsmart.co.il



ب) نعطى أن EK هو ارتفاع وجه جانبي في الهرم.

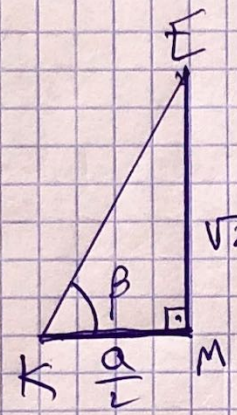
* كل الأوجه الجانبية في الهرم الذي قاعدته مربع عبارة عن مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة. وبالتالي الارتفاعات متساوية

نأخذ الارتفاع EK في الوجه EBA.

الارتفاع EK ينصف القاعدة AB، وبالتالي

$$AK = KB = \frac{a}{2}$$

وأيضاً $MK = \frac{a}{2} \leftarrow MK = \frac{BC}{2}$



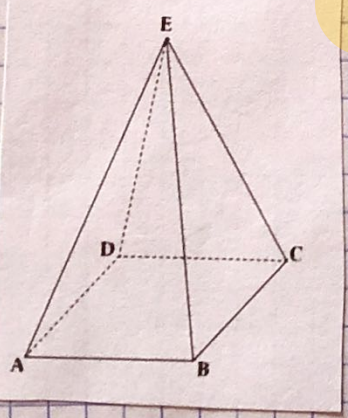
في ΔMKE نحسب $\beta = \measuredangle EKM$ الزاوية بين EK وقاعدة الهرم.

$$EM = \sqrt{2}a, \quad MK = \frac{a}{2}$$

$$tg\beta = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}a \cdot \frac{2}{a} = 2\sqrt{2}$$

$$tg\beta = 2\sqrt{2} \rightarrow \boxed{\beta = 70.529^\circ}$$

إذاً الزاوية ارتفاع وجه جانبي وقاعدة الهرم هي $\boxed{70.529^\circ}$



ج) مساحة سطح الهرم هي مساحة كل الأوجه الجانبية للهرم.

الأوجه الجانبية للهرم متطابقة كلها مثلثات متساوية الساقين

مساحة الوجه الجانبي ΔEAB هي $\frac{AB \cdot EK}{2}$

نجد EK في ΔEKM بحيث:

$$EK^2 = EM^2 + KM^2 = (\sqrt{2}a)^2 + (\frac{a}{2})^2 = \dots = \rightarrow \boxed{EK = 1.5a}$$

$$S_{\Delta AEB} = \frac{AB \cdot EK}{2} = \frac{a \cdot 1.5a}{2} = \frac{3}{4}a^2 \rightarrow \text{مساحة الأوجه الأربعة} = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot a^2 = \boxed{3a^2}$$

مساحة سطح الهرم $= 3a^2 = 36.75 \rightarrow a^2 = \frac{36.75}{3} = 12.25$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{12.25} = 3.5$$

$$\boxed{a = 3.5}$$ إذاً:

www.iqsmart.co.il

السؤال 3

$0 \le X \le \pi$ $f'(x) = 2\sin 2x$ تحقق من أن $f(x)$ دالة

أ- النقاط الحرجة: $f'(x) = 0$:نحل

$2\sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = \pi k$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} k$

$k=0 \rightarrow \boxed{x=0}$

$k=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ $\quad k=2 \rightarrow \boxed{x=\pi}$

نصنف النقاط حسب $f''(x)$

$f'(x) = 2 \cdot 2\cos 2x = 4\cos 2x \Rightarrow f''(x) = 4\cos 2x$

$x=0 \rightarrow f''(0) = 4 \cdot \cos 0 = 4 > 0 \rightarrow \boxed{x=0 \text{ نقطة صغرى}}$

$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) = 4 \cdot \cos 2\frac{\pi}{2} = -4 < 0 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2} \text{ نقطة عظمى}}$

$x=\pi \rightarrow f''(\pi) = 4 \cdot \cos 2\pi = 4 > 0 \rightarrow \boxed{x=\pi \text{ نقطة صغرى}}$

ب- الرسم البياني للدالة $f(x)$ يمر بـ $(0,-2)$

$f(x) = \int f(x)dx = \int 2\sin 2x\,dx = 2 \cdot \frac{(-\cos 2x)}{2} + C$

$f(x) = -\cos 2x + C$

$f(0) = -2 \rightarrow -\cos 2(0) + C = -2 \rightarrow C = -2+1 = -1$

$-(-1)$

$\boxed{f(x) = -\cos 2x - 1}$

www.iQsmart.co.il

لكي نرسم البيان نجد أولاً التقاطع مع x ← $f(x)=0$

$0 = -\cos 2x - 1 \longrightarrow \cos 2x = -1 \longrightarrow 2x = \pi + 2\pi k$

$\longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k=0 \longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ // $k=1 \longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi \longrightarrow x=\frac{3\pi}{2}$ خارج المجال

أ.ت: تقاطع مع x $(\frac{\pi}{2}, 0)$ و التقاطع مع y $(0,-2)$

المقاطع العظمى ← نجد الأدنى y

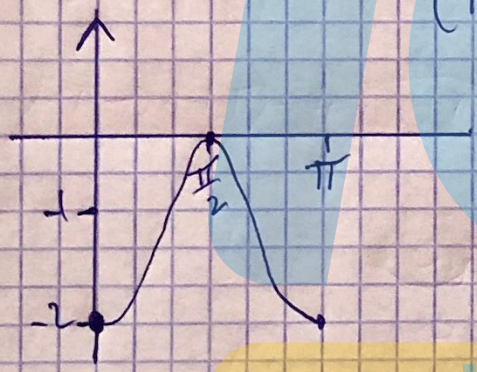
$x=0 \rightarrow f(0) = -2\cos 0 - 2 = -2$ min

$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = 0$ maximum

$x=\pi \Rightarrow f(\pi) = -\cos(2\pi) - 1 = -2$ minimum

$(\pi, -2)^{min}$ // $(\frac{\pi}{2}, 0)^{max}$ / $(0,-2)^{min}$

ب. الرسم البياني للدالة



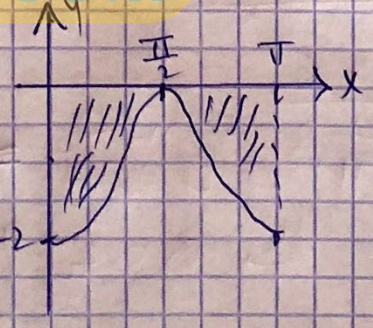
www.IQsmart.co.il

ج - المساحة المحاطة بين

بما أن الدالة سالبة في المجال المعطى

لذلك المساحة هي القيمة المطلقة لتكامل الدالة

أي



$$S_{المحطة} = \left| \int_0^{\pi} (-\cos 2x - 1)\,dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{-\sin 2x}{2} - x \right]_0^{\pi} \right| = \left| \left[\frac{-\sin 2\cdot\pi}{2} - \pi \right] - \left[\frac{-\sin 2\cdot 0}{2} - 0 \right] \right| = |-\pi - 0| = \pi$$

أ.ت: المساحة المحطة هي π

سؤال 4

$$f(x)=a\cdot e^{x}-9\cdot e^{-x}$$

أ- الدالة معرفة لكل x

ب- عيّن أن ميل المماس في $x=\ln 3$ هو 6 أي تحقق:

$$f'(\ln 3)=6$$

$$f'(x)=a\cdot e^{x}-9\cdot(-1)e^{-x}=a\cdot e^{x}+9e^{-x}$$

$$\boxed{f'(x)=a\cdot e^{x}+9e^{-x}}$$

$$f'(\ln 3)=a\cdot e^{\ln 3}+9\cdot e^{-\ln 3}=6$$

$$\rightarrow a\cdot 3+9\cdot\frac{1}{3}=6 \rightarrow 3a=6-3=3$$

$$\rightarrow 3a=3 \rightarrow \boxed{a=1}$$

ج. $a=1$

$$f(x)=e^{x}-9e^{-x} \Rightarrow f'(x)=e^{x}+9e^{-x}$$

د. نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة مع محور x $(y=0)$

www.iQsmart.co.il

$$e^{x}-9e^{-x}=0 \rightarrow e^{x}-\frac{9}{e^{x}}=0 \xrightarrow{*e^{x}} (e^{x})^{2}-9=0$$

$$\rightarrow (e^{x})^{2}=9 \rightarrow e^{x}=\pm\sqrt{9} \rightarrow e^{x}=\pm 3$$

بما أن $e^{x}>0$ لكل x فإن $e^{x}=-3$ غير ممكن.

$$e^{x}=3 \rightarrow \underline{x=\ln 3} \rightarrow \boxed{(\ln 3,0)}$$

نقاط تقاطع مع y: $x=0$

$$f(0)=e^{0}-9\cdot e^{-0}=1-9=-8$$

$$\boxed{(0,-8)}$$

2. P الحالات التصاعدية والتنازلية للدالة، نجد $f'(x)=0$

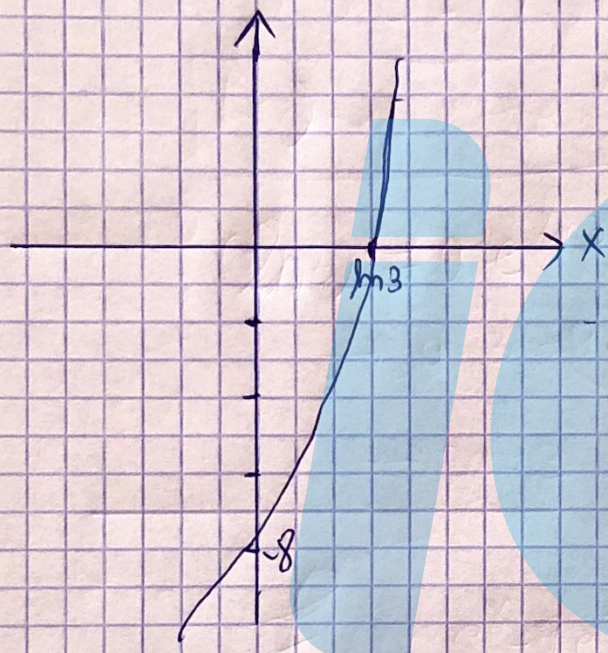
$$f'(x)=e^x+9e^{-x}=0 \rightarrow e^x+\frac{9}{e^x}=0 \rightarrow (e^x)^2+9=0$$

$(e^x)^2$ = موجبة دائماً $\rightarrow (e^x)^2+9>0$

لكل x

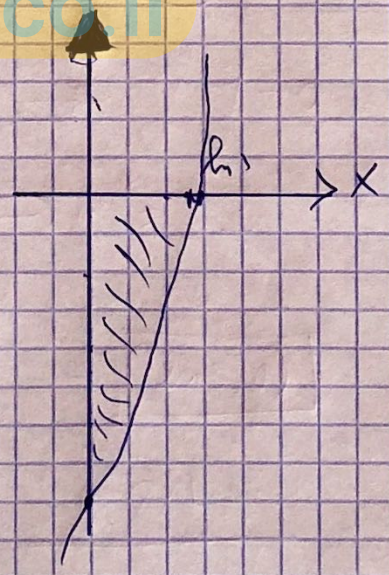
لذلك الدالة تصاعدية لكل x أي أن المنحنى موجب دائماً

3 P



ب. المساحة المطلوبة هي المساحة المظللة:

بما أن الدالة سالبة لذلك المساحة هي:



$$S_{\text{المظللة}}=\left|\int_0^{\ln 3} f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^{\ln 3} e^x-9e^{-x}\,dx\right|$$

$$=\left|\left[e^x+9e^{-x}\right]_0^{\ln 3}\right|=\left|\left(e^{\ln 3}+9e^{-\ln 3}\right)-\left(e^0+9e^{-0}\right)\right|$$

$$=\left|(3+3)-(1+9)\right|=|6-10|=|-4|=4$$

$$\boxed{S_{\text{المظللة}}=4 \text{ وحدة مساحة}}$$

سؤال 5

$$f(x)=\frac{2x}{\ln x-2}$$

أ. مجال تعريف الدالة يجب ان يحقق شرطين متتحيين :-

$\ln x$ معرف اي $x>0$ I

$\ln x-2\neq 0$ II واضحا

$\ln x\neq 2 \leftarrow x\neq e^2$

* إذا مجال تعريف الدالة $\{x\neq e^2,\ x>0\}$

ب.1: بما أن $x>0$ في مجال تعريف الدالة لذلك لا يوجد تقاطع مع y

تقاطع مع x $\leftarrow (y=0)$

$\frac{2x}{\ln x-2}=0 \leftarrow x=0$ وهذا خارج مجال التعريف

اذا لا يوجد تقاطع مع المحاور.

ب.2 بحسب المعطى للدالة $f(x)$ يوجد خط تقارب عمودي واحد.

خط التقارب العمودي يكون في النقطة التي مرفق الدالة غير معرفة وللك معادلته $x=e^2$

www.IQsmart.co.il

ب.3 التقاطع القصوى يحقق: $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2\cdot[\ln x-2]-2x\left[\frac{1}{x}-0\right]}{(\ln x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ln x-4-2}{(\ln x-2)^2} \rightarrow \left\{f'(x)=\frac{2(\ln x-3)}{(\ln x-2)^2}\right\}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \ln x-3=0 \rightarrow \ln x=3 \rightarrow x=e^3$$

نجد الاحداثي y للنقطة: $(e^3, 2e^3)$

$$f(e^3)=\frac{2e^3}{\ln e^3-2}=\frac{2e^3}{3\ln e-2}=2e^3$$

نقطة التقاطع مع محور السينات

x	0	$0<x<e^2$	e^2	$e^2<x<e^3$	e^3	$x>e^3$
f'	‖	−	‖	−	0	+
f	‖	↘	‖	↘	$2e^3$	↗
	‖		‖	min		

$f'(1) = -$ $\quad f'(10) = -$ $\quad f'(30) = +$

أي أن $\min(e^3, 2e^3)$

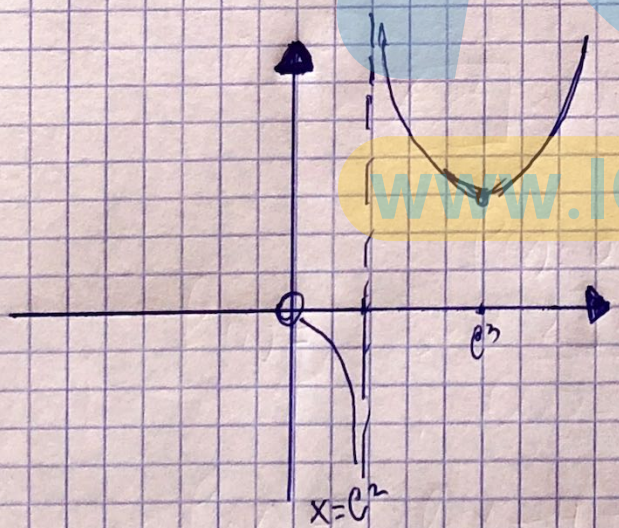
ب. 4 مجالات تناقصية: $0<x<e^2$ و $e^2<x<e^3$

مجالات تزايدية: $x>e^3$

ب. 5 $f(0.1) = \frac{2(0.1)}{2\ln(0.1)-2} = -0.0465$

$(0.1, 0.0465)$

نرسم الدالة:



www.IQsmart.co.il

$g'(x) = f(x)$ ←

الدالة $g(x)$ تكون تزايدية عندما تكون $g'(x)$ موجبة

وبما أن $g'(x)=f(x)$ للدالة $g(x)$ تزايدية عندما

تكون $f(x)>0$ أي في المجال $x>e^2$

الجواب: مجال تزايد $g(x)$ هو $x>e^2$