حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد (أ)-صيف 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل نموذج 381-(802)
موعد (أ) 2018

حل سؤال 1

(أ) نفرض سعر الساعة x شيكل اذا سعر الخاتم الواحد x 160% أو $1.6x$
بحسب المعطيات سعر 4 خواتم هو 4032 شيكل
أي يتحقق:

$$4\cdot(1.6x)=4032$$

$$6.4x=4032$$

$$x=\frac{4032}{6.4} \Rightarrow \boxed{x=630}$$

إذاً سعر الساعة هو 630 شيكل وسعر الخاتم $1.6\cdot(630) \leftarrow 1008$ شيكل

(ب) نفرض أنهم باعوا y خواتم إذاً عدد الساعات التي بيعت $(22-y)$.
ويتحقق: $\underbrace{1008\cdot y}_{\text{ثمن الخواتم التي بيعت}} + \underbrace{630(22-y)}_{\text{ثمن الساعات التي بيعت}}=17262$

$$\rightarrow 1008y+13860-630y=17262$$

$$1008y-630y=17262-13860$$

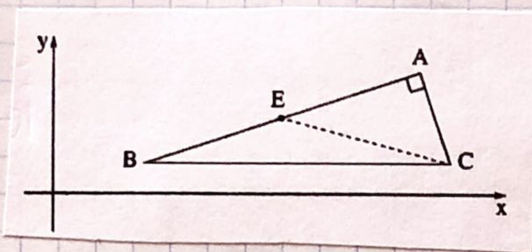
$$378y=3402 \Rightarrow y=\frac{3402}{378}=9$$

إذاً عدد الخواتم التي بيعت في الصفقة هو 9
وعدد الساعات التي بيعت في الصفقة هو $22-9 \leftarrow 13$ ساعة

حل سؤال 2 :

أ) حسب المعطيات المثلث ABC قائم الزاوية
أي AC عامود AB ($\sphericalangle A = 90^\circ$).

اذا ميل AC = $\frac{-1}{\text{ميل } AB}$



ميل AB هو $\frac{1}{3}$ لذلك

ميل AC هو $\frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$

اذا ميل AC $= -3$

معطى أن: $\boxed{AB: y=\frac{1}{3}x}$

بحسب المعطيات A(12,4) وبما أن النقطة A تقع على AC لذلك
نعوضها في الصورة العامة لمعادلة AC ونجد المعادلة

$AC: y = mx + n$

$A(12,4) \quad m = -3 \Leftarrow$

$4 = -3 \cdot 12 + n$

$4 = -36 + n \Longrightarrow 4 + 36 = n \Longrightarrow \boxed{40 = n}$

إذا معادلة AC: $\boxed{y = -3x + 40}$

ب) بحسب المعطيات $B:(3, y_B)$

معادلة AB هي $y = \frac{1}{3}x$

نعوض $x=3$ ونجد y_B ← $y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

$\boxed{\text{إذا: } B(3,1)}$

ب.2) BC موازٍ للمحور x أي معادلته $y=1$ لأن الاحداثي y للنقطة B هو 1. من هنا الاحداثي y للنقطة C أيضاً 1
أي $C:(x_C, 1)$. كذلك C تقع على المستقيم AC أي تحقق معادلته، نعوض $y=1$ في معادلة AC ونجد x_C.

$y = -3x + 40$

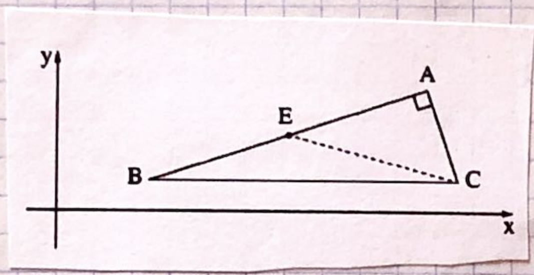
$1 = -3x_C + 40 \Longrightarrow 1 - 40 = -3x_C \Longrightarrow -39 = -3x_C$

$\boxed{C:(13,1)} \quad \boxed{13 = x_C} \leftarrow \frac{-39}{-3} = x_C$

أ. النقطة E هي منتصف AB.

اذن:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}$$



$$x_E = \frac{12+3}{2} \qquad y_E = \frac{4+1}{2}$$

$$x_E = \frac{15}{2} = 7.5 \qquad y_E = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\boxed{E(7.5, 2.5)}$$

مساحة المثلث EAC القائم الزاوية:

هي $\frac{AC \cdot EA}{2}$

نجد أطوال الأضلاع:-

$$AE = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{(12-7.5)^2 + (4-2.5)^2}$$

$$= \sqrt{(4.5)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{22.5} \Longrightarrow \boxed{AE = \sqrt{22.5}}$$

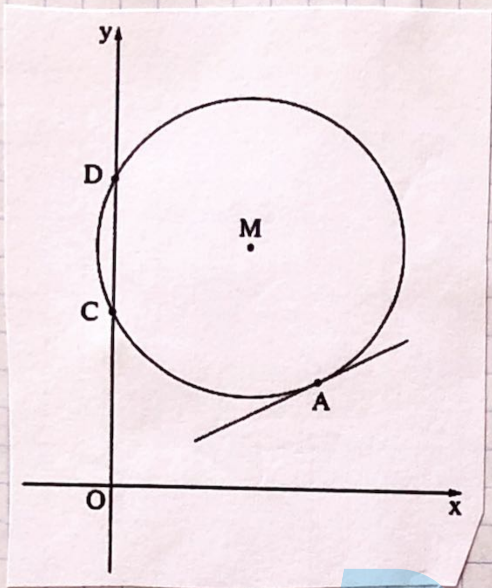
$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(12-13)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$$

$$AC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \Longrightarrow \boxed{AC = \sqrt{10}}$$

$$\text{مساحة}_{\triangle AEC} = S_{\triangle AEC} = \frac{AE \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{22.5} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$\boxed{\text{اذن مساحة المثلث } AEC = 7.5}$$

حل سؤال 3



أ) معادلة الدائرة هي

$$(x-4)^2+(y-7)^2=R^2$$

أي مركزها $M:(4,7)$

بما أن النقطة A تقع على الدائرة

إذاً تحقق معادلتها ← نعوض $A(6,3)$

في معادلة الدائرة ونجد R :-

$$(6-4)^2+(3-7)^2=R^2$$

$$(2)^2+(-4)^2=R^2$$

$$4+16=R^2$$

$$20=R^2 \Longrightarrow \boxed{\sqrt{20}=R}$$

أ.2) بالاعتماد على البند (أ) $\boxed{R^2=20}$

معادلة الدائرة :-

$$(x-4)^2+(y-7)^2=20$$

ب) النقطتين D و C تقعان على المحور y لذلك $x_D=x_C=0$

نعوض في معادلة الدائرة $x=0$ ونجد y.

$$(0-4)^2+(y-7)^2=20$$

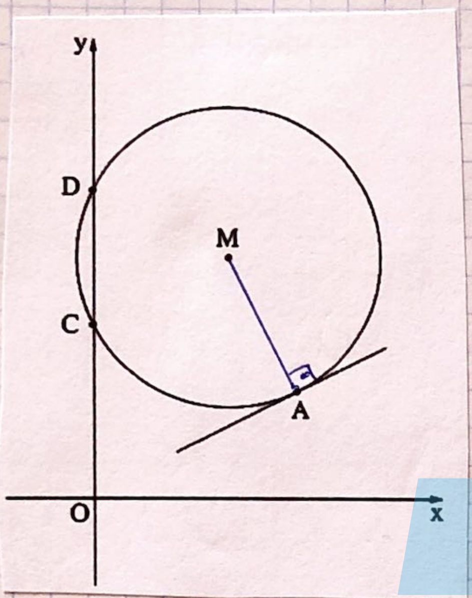
$$(-4)^2+(y-7)^2=20 \Longrightarrow 16+(y-7)^2=20$$

$$\Rightarrow (y-7)^2=20-16=4 \Rightarrow (y-7)^2=4 \Rightarrow y-7=\pm\sqrt{4}$$

$$y_1-7=2 \Rightarrow y_1=7+2=9 \Rightarrow \boxed{y_1=9}$$

أو $y_2-7=-2 \Rightarrow y_2=-2+7=5 \Rightarrow \boxed{y_2=5}$

بما أنه بحسب الرسم $y_D>y_C$ إذاً $\boxed{D:(0,9) \quad C:(0,5)}$



(1.أ) المماس يُعامد نصف القطر في نقطة التماس

لذلك $(\text{ميل المماس})(\text{ميل } AM) = -1$

ميل $AM = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ // $M(4,7)$ $A(6,3)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-3}{4-6} = \frac{4}{-2} = -2$$

إذا ميل المماس: $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

(2.أ) معادلة المماس من الصورة: $y = mx + n$

$A:(6,3)$ و $m = \frac{1}{2}$

$3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + n \rightarrow 3 - 3 = n \rightarrow \boxed{0 = n}$

إذا معادلة المماس هي: $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$

(3.أ) بما أن $n = 0$ إذاً المماس يمر بـ $(0,0)$

(ب.) محيط الشكل الرباعي $AMCO = AM + MC + CO + AO$

$CM = R = \sqrt{20}$, $AM = R = \sqrt{20}$, $CO = 5$, نجد طول AO ونحسب المحيط

$$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(6-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$AO = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$$

$$\underset{AMCO}{\text{محيط}} = AO + CO + MC + AM = \overbrace{\sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{20} + 5}^{20.65}$$

$$\boxed{\underset{AMCO}{\text{محيط}} = 20.65}$$

حل سؤال 4

$$f(x)=3\cdot\sqrt{x}$$

أ. مجال تعريف الدالة هو $x\geq 0$

ب. ميل المماس هو $f'(4)$ نجد $f'(x)$

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}}$$

$$f'(4)=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

المماس في $x=4$ هو $\frac{3}{4}$

ب-2 لكي نجد معادلة المماس يجب أن نجد نقطة التماس.

نقطة التماس هي $(4,f(4))$ $\Leftarrow$

$$f(4)=3\cdot\sqrt{4}=3\cdot 2=6$$

اذًا نقطة التماس هي $(4,6)$

معادلة المماس من الصورة $y=mx+n$

$m=\frac{3}{4}$

$(4,6)$ نعوض $6=\frac{3}{4}\cdot 4+n \Rightarrow 6=3+n \Rightarrow 6-3=n$

$\boxed{3=n} \Rightarrow$ معادلة المماس: $\boxed{y=\frac{3}{4}x+3}$

ج. نبرهن أنه لا يوجد نقطة فيها $f'(x)=0$

$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow$ بما أن البسط 3 لذلك

التعبير $\frac{3}{2\sqrt{x}}$ لا يمكن ان يكون 0 أبدًا.

أي لا يوجد نقاط قصوى للدالة وهي اما تصاعدية او تنازلية على كل مجال تعريفها.

د. نفحص اشارة المشتقة في نقطة معينة ونحدد إذا كانت الدالة تصاعدية ام تنازلية $f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{1}}=\frac{3}{2}>0$ $\Leftarrow$ المشتق موجب لذلك

الدالة تصاعدية لكل $x>0$

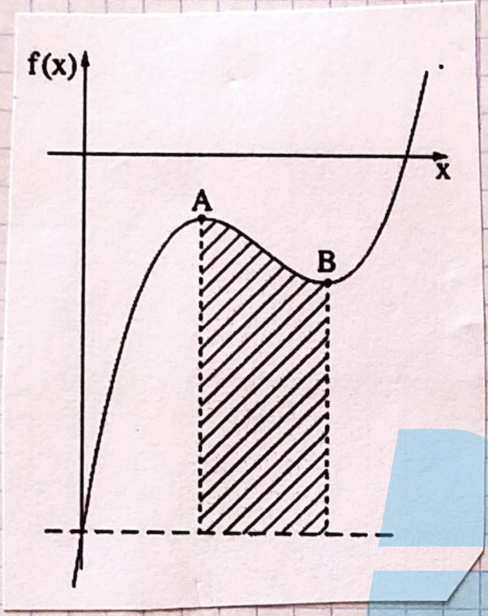
حل سؤال 5

أ) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$

الدالة $f(x)$ تقطع المحور y في النقطة $y=-6$

لأن $f(0)=-6$ لذلك معادلة

المستقيم هي $\boxed{y=-6}$



ب) في النقاط A و B تتحقق $f'(x)=0$

$$f'(x)=6x^2-18x+12$$

$$f'(x)=0$$

$$\Rightarrow 6x^2-18x+12=0 \quad /:6$$

$$x^2-3x+4=0$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور نحصل على:

$$x_1=2 \qquad x_2=-1$$

بما أن $x_B>x_A$ إذن $B:(2,y_B)$ $A:(1,y_A)$

نعوض بالدالة ونجد الإحداثي y لـ A و B.

$$f(1)=\underbrace{2\cdot(1)^3}_{2}\underbrace{-9(1)^2}_{-9}+12\cdot1-6=2-9+12-6=-1 \Rightarrow \boxed{A(1,-1)}$$

$$f(2)=\underbrace{2\cdot2^3}_{16}-\underbrace{9\cdot2^2}_{36}+12\cdot2-6=16-36+24-6=-2 \Rightarrow \boxed{B(2,-2)}$$

ج) المساحة المحصورة $=\left|\int_1^2(-6-f(x))\,dx\right|=\left|\int_1^2-6-(2x^3-9x^2+12x-6)\,dx\right|$

هي المساحة بين المستقيم $y=-6$ والدالة في المقطع $[1,2]$

$$=\left|\int_1^2 \cancel{-6}-2x^3+9x^2-12x+\cancel{6}\right|=\left|\int_1^2-2x^3+9x^2-12x\right|$$

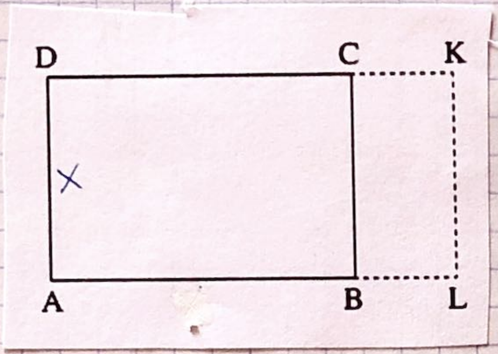
$$\left|\left[-\frac{2x^4}{4}+\frac{9\cdot x^3}{3}-\frac{12\cdot x^2}{2}\right]_1^2\right|=\left|\left[-\frac{x^4}{2}+3x^3-6x^2\right]_1^2\right|=\left|\underbrace{\left(-\frac{2^4}{2}+3\cdot2^3-6\cdot2^2\right)}_{-8}-\underbrace{\left(\frac{1^4}{2}+3\cdot1^2+6\cdot1^2\right)}_{+3.5}\right|=4.5$$

حل سؤال 6

أ) بحسب معطيات السؤال مساحة المستطيل هي 25

أي $AD \cdot AB = 25 \Leftarrow x \cdot AB = 25$

$$\boxed{AB = \frac{25}{x}}$$



ب) 1) بعد أن أطالوا AB و DC بـ 2

أصبح $AL = \frac{25}{x}+2$ و $DK = \frac{25}{x}+2$

محيط المستطيل ALKD هو:

$$\underbrace{AD}_{x} + \underbrace{KL}_{x} + \underbrace{AL}_{\frac{25}{x}+2} + \underbrace{DK}_{\frac{25}{x}+2}$$

محيط المستطيل ADKL $= 2x + 2\left(\frac{25}{x}+2\right) = 2x + \frac{50}{x} + 4$

2) الدالة التي تعبر عن محيط المستطيل هي:

$$f(x) = 2x + \frac{50}{x} + 4$$

نبحث متى تحصل هذه الدالة على أصغر قيمة $\Leftarrow f'(x)=0$

$$f'(x) = 2 + 50\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2 - \frac{50}{x^2} = 0 \to 2 = \frac{50}{x^2} \to 2x^2 = 50$$

$$\to x^2 = \frac{50}{2} \to x^2 = 25 \to x = +\sqrt{25} = 5 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

إنتبه x موجب لانه يعبر عن طول ضلع مستطيل

نفحص نوع النقطة القصوى بواسطة جدول للمشتقة (جدول)

x	4	5	6
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

$f'(4) = 2 - \frac{50}{4^2} < 0$

$f'(6) = 2 - \frac{50}{6^2} = 2 - \frac{50}{36} > 0$

اذا $\boxed{x=5}$ هو طول الضلع AB الذي يعطينا اصغر محيط