حل نموذج بجروت

482 (805)

موعد صيف (ب)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

بحسب المعطيات اشترت دالية الثلاجة بأقساط شهرية.
القسط الأول 700 شيكل وكل قسط ابتداءً من الثاني أقل بـ 30
شيكل من القسط الذي قبله.
أي أن الأقساط عبارة عن متوالية حسابية حدها الأول 700
وفرقها 30-، $d=-30$ و $a_1=700$

أ. نبحث عن الحد الذي قيمته 280 أي $a_n=280$ ؟ $n=?$

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 280=700+(n-1)\cdot(-30)$$

$$280=700-30n+30 \Rightarrow 280=730-30n$$

$$\Rightarrow 30n=730-280 \Rightarrow 30n=450 \Rightarrow \boxed{n=15}$$

إذاً القسط الـ 15 دفعت فيه دالية 280 شيكل.

ب.1

$$a_{29}=700+\overbrace{(29-1)\cdot(-30)}^{28\cdot(-30)}=700-840=-140$$

إذاً لا يمكن أن يكون القسط 29 هو الأخير لأنه عندها ستدفع دالية مبلغ سالب وهذا غير ممكن

ب.2 نفحص متى يتحقق $a_n=0$ أي هل يوجد قسط مساوٍ لـ 0 شيكل وعندها آخر قسط هو القسط السابق

$$a_n=700+(n-1)\cdot(-30)=0 \Rightarrow 730-30n=0$$

$$\Rightarrow 730=30n \Rightarrow 24\frac{1}{3}=n$$

ولكن n عدد صحيح لذلك لا يوجد قسط قيمته 0.

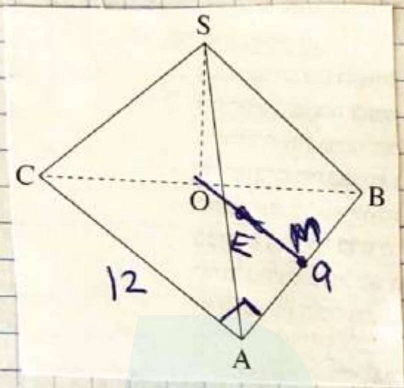
ج. القسط الأخير هو قسط 24 وستدفع عندها دالية

$$a_{24}=700+23(-30)=700-690=10$$

شيكل وعدد الأقساط هو 24 قسط (عدد الأقساط)

حل سؤال 2

حسب المعطيات $SABC$ هرم قائم، الزاوية بين SB والقاعدة 30°
القاعدة ABC عبارة عن مثلث قائم الزاوية $\sphericalangle CAB = 90^\circ$



أ) نجد أولاً CB :

حسب فيثاغورس في ΔABC

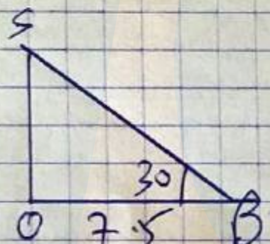
$$CB^2 = AB^2 + AC^2$$

$$CB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144$$

$$CB^2 = 225 \rightarrow \boxed{CB = 15}$$

بما أن الهرم $SABC$ قائم اذاً O هي مركز الدائرة المحيطة بقاعدة الهرم أي O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC وبالتالي BC هو قطر الدائرة و O منتصف BC.

أي أن $OB = \frac{15}{2} \leftarrow OB = 7.5$



في ΔSOB يتحقق :-

$$tg30 = \frac{SO}{OB} \Rightarrow tg30 = \frac{SO}{7.5}$$

$$\Rightarrow SO = 7.5 \cdot tg30 = 4.33$$

$$\boxed{SO = 4.33}$$

ب. حجم الهرم = مساحة القاعدة × الارتفاع

القاعدة مثلث قائم الزاوية

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$$

$$V_{\text{الهرم}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} 54 \cdot (4.33) = 77.994$$

حل سؤال 3

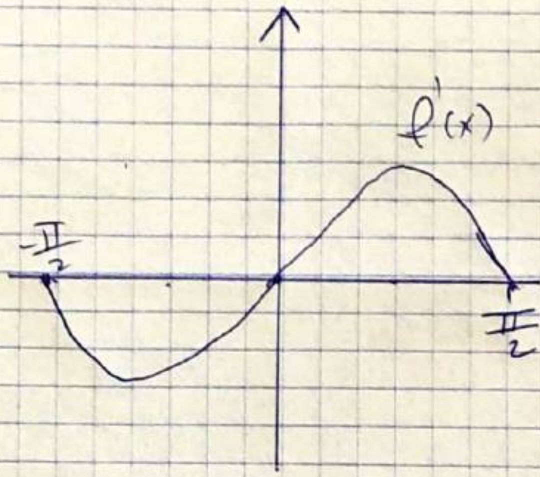
أ- المجالات التصاعدية لـ $f(x)$

هي المجالات الموجبة لـ $f'(x)$

والمجالات التنازلية لـ $f(x)$

هي المجالات السالبة لـ $f'(x)$

لذلك بحسب رسم $f'(x)$



المجالات التصاعدية لـ $f(x)$:

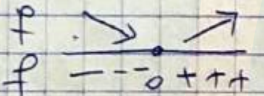
$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{2}}$

المجالات التنازلية لـ $f(x)$: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < 0}$

ب- النقاط الصفرية لـ f' هي نقاط قصوى للدالة f

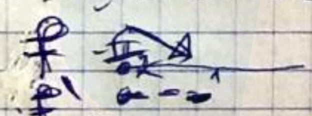
اذاً $x=0$ هي نقطة قصوى من نوع מינימום.

لان المشتقة قبلها سالبة اي الدالة قبلها تنازلية وبعدها المشتقة موجبة اي الدالة تصاعدية



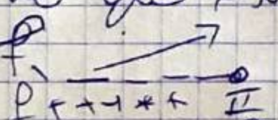
$x=-\frac{\pi}{2}$ نقطة قصوى طرف - קיצון קצה

والنقطة من نوع מקסימום لانه على يمين النقطة المشتقة سالبة اي بعد النقطة تصبح الدالة تنازلية



$x=\frac{\pi}{2}$ نقطة قصوى طرف - קיצון קצה

والنقطة من نوع מקסימום لان الدالة قبلها تصاعدية

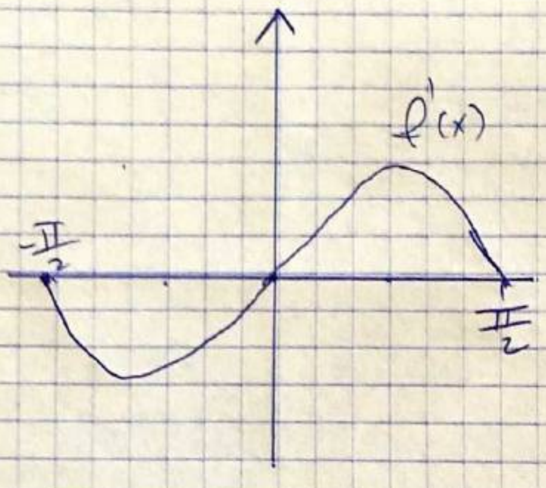


للاجمال:

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ מקסימום

$x=0$ מינימום.

حل سؤال 3



أ- المجالات التصاعدية لـ $f(x)$
هي المجالات الموجبة لـ $f'(x)$
والمجالات التنازلية لـ $f(x)$
هي المجالات السالبة لـ $f'(x)$
لذلك يجب رسم $f'(x)$
المجالات التصاعدية لـ $f(x)$:

$$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{2}}$$

المجالات التنازلية لـ $f(x)$: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x < 0}$

ب- النقاط الصفرية لـ f' هي نقاط قصوى للدالة f
إذاً $x=0$ هي نقطة قصوى من نوع מינימום.
لأن المشتقة قبلها سالبة أي الدالة قبلها تنازلية وبعدها المشتقة موجبة أي الدالة تصاعدية

f ↘ ↗
f' − − 0 + + +

$x=-\frac{\pi}{2}$ نقطة قصوى طرف - קיצון קצה
والنقطة من نوع מקסימום لأنه على يمين النقطة المشتقة سالبة أي بعد النقطة تصبح الدالة تنازلية.

f $-\frac{\pi}{2}$ ↘
f' − − −

$x=\frac{\pi}{2}$ نقطة قصوى طرف - קיצון קצה
والنقطة من نوع מקסימום لأن الدالة قبلها تصاعدية

f ↗
f' + + + + + $\frac{\pi}{2}$

للإجمال:

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ מקסימום
$x=0$ מינימום.

$f(x)=\sin^2x-\frac{1}{4}$ ج-

تقاطع مع x ← $y=0$ ← $\sin^2x=\frac{1}{4}$

$\sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k \;//\; x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$

$k=0$ $x_1=\frac{\pi}{6}$ أو $x=\frac{5\pi}{6}$ ✗ خارج المجال

$k=1$ $x=\frac{\pi}{6}+2\pi$ خارج المجال

$k=-1$ → خارج المجال

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ أو $x_2=\pi-(-\frac{\pi}{6})+2\pi k$

$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ أو $x_2=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$

$k=0$ $x=-\frac{\pi}{6}$ أو $x=\frac{7\pi}{6}$ ✗

$k=1$ $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$ خارج المجال ، $x=$ خارج المجال ✗

اذاً: نقاط التقاطع مع المحور x هي:-

$\boxed{(\frac{\pi}{6},0) \quad (-\frac{\pi}{6},0)}$

مع المحور y:

$f(0)=\sin^2 0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

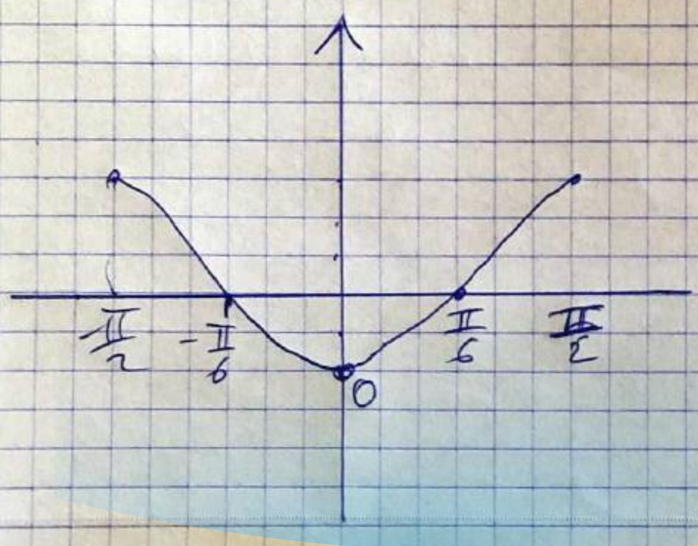
$(0,-\frac{1}{4})$

د) نجد احداثيات النقاط القصوى

$f(0)=-\frac{1}{4}$ (min)

$f(-\frac{\pi}{2})=\sin^2(-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$f(\frac{\pi}{2})=\sin^2(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$



ه- نقطة تقاطع الدالة ~~مع~~ المحور X التي على يمين نقطة الأصل

هي $(\frac{\pi}{6},0)$

نجد معادلة المماس في $x=\frac{\pi}{6}$

الصورة العامة لمعادلة المماس هي $y=mx+n$

$$m=f'(\tfrac{\pi}{6})=?$$

$$f'(x)=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$$

$$f'(\tfrac{\pi}{6})=\sin 2\cdot\tfrac{\pi}{6}=\sin\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نعوض النقطة $(\frac{\pi}{6},0)$ و $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$ في معادلة المماس

ونجد n

$$y=mx+n$$

$$0=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+n \Rightarrow n=-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{12}$$

ومعادلة المماس في $x=\frac{\pi}{6}$ هي:

$$\boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$$

نجد معادلة المماس في النقطة الدنيا الصغرى للدالة

ميل المماس في نقطة النهاية الصغرى هو 0 لأن $f'(x)=0$

احداثيات نقطة النهاية الصغرى هي $(0,-\frac{1}{4})$

ولذلك معادلة المماس هناك هي $\boxed{y=-\frac{1}{4}}$

نقطة تقاطع المماسين تتحقق:

$$\frac{\sqrt{3}x}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\pi}{12} \quad /\times 12$$

$$6\cdot\sqrt{3}x=\sqrt{3}\pi-3 \rightarrow x=\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6\cdot\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{3}{6\cdot\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\pi-\sqrt{3}}{6}=x}$$

نقطة التقاطع $(\frac{\pi-\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{4})$

الاحداثي y للنقطة هو $-\frac{1}{4}$ لأنها تقع على المستقيم $y=-\frac{1}{4}$

حل سؤال 4

المعرفة لكل x $\quad f(x) = -e^{2x} + 4 \cdot e^{x} - 3$

أ. تقاطع مع المحاور

مع $x \longleftarrow y=0$

$0 = -e^{2x} + 4e^{x} - 3$

$\Rightarrow e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0$

نعوض $e^{x} = t$ تصبح المعادلة

$t^2 - 4t + 3 = 0$

نحل المعادلة حسب الدستور

$t_{1,2} = \dfrac{4 \mp \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \mp \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \mp \sqrt{4}}{2}$

$t_{1,2} = \dfrac{4 \mp 2}{2}$ $\quad t_1 = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ $\quad \boxed{t_1 = 3}$

$\quad t_2 = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ $\quad \boxed{t_2 = 1}$

نجد x:

$e^{x} = t_1 \Longrightarrow e^{x} = 3$

$\ln e^{x} = \ln 3 \Longrightarrow \boxed{x = \ln 3}$

$e^{x} = t_2 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow \ln e^{x} = \ln 1 \Rightarrow \boxed{x = \ln 1 = 0}$

اذاً نقاط التقاطع مع x هي $\boxed{(\ln 3, 0) \text{ و } (0,0)}$

واضح ان $(0,0)$ هي التقاطع مع y أيضاً.

ب.

$f'(x) = -2e^{2x} + 4 \cdot e^{x}$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2e^{2x} + 4e^{x} = 0$

$\Longrightarrow -2e^{x}(e^{x} - 2) = 0$

$-2e^{x} = 0$ $\quad e^{x} - 2 = 0 \longrightarrow e^{x} = 2 \xrightarrow{(\ln)} \boxed{x = \ln 2}$

لا يوجد حل e^{x} دائماً موجب

نشتق المشتقة الثانية $f''(x)$

$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^{x}$

$f''(\ln 2) = -4 \cdot e^{2\ln 2} + 4 \cdot e^{\ln 2} = -4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = -8 < 0 \Rightarrow$

מקסימום

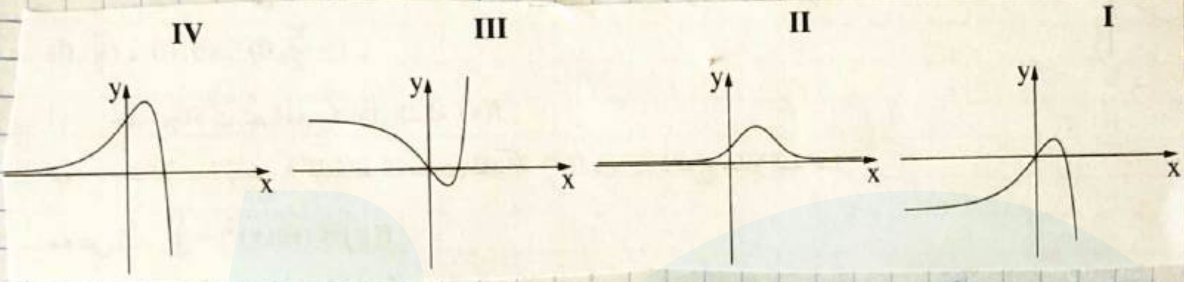
بما أنّ $x=\ln 2$ מקסימום , نجد y :-

$$f(\ln 2) = -e^{2\cdot\ln 2} + 4\cdot e^{\ln 2} - 3$$

$$-4 + 4\cdot 2 - 3 \quad = 1$$

اذا النقطة القصوى هي מקסימום $(\ln 2, 1)$

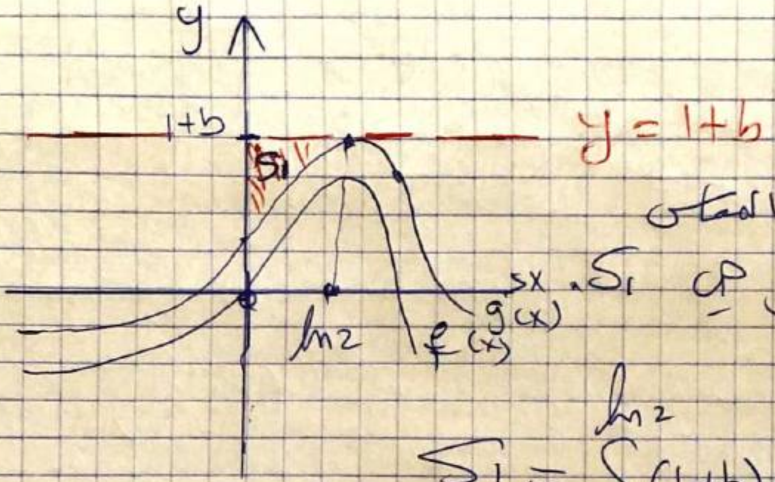
ج.



لحسب نتائج البنود السابقة $(\ln 2, 1)$ هي נק מקסימום
وبالتالي رسم II غير ملائم .
نقاط تقاطع الدالة مع المحاور هي (0,0) و $(\ln 3, 0)$
ولذلك رسم II و IV غير ملائمة لاحتوائها ل (0,0)
اذًا الرسم الملائم هو $\boxed{I}$.

د. $g(x) = f(x) + b$ b بارامتر.
الدالة g عبارة عن ازاحة عمودية (على المحور y)
للدالة f(x) ولذلك للدالة g و f نفس الاحداثي
X للنقطة القصوى. اي انه $x = \ln 2$ هو الاحداثي X
للنقطة القصوى والاحداثي y لها هو $1+b$
اي أن : $(\ln 2, (1+b))$ هي נק׳ מקסימום ل $g(x)$
ميل المماس في النقطة القصوى لأي دالة هو 0.
وبالتالي معادلة المماس هي

$$y = 0\cdot x + (1+b) \implies \boxed{y = 1+b}$$



المساحة المحصورة بين المماس

والمحور y والدالة g هي S_1.

وهي عبارة عن

$$S_1 = \int_0^{\ln 2} (1+b) - g(x)\,dx$$

$$S_1 = \int_0^{\ln(2)} (1+b) - (f(x)+b)\,dx$$

$$S_1 = \int_0^{\ln 2} (1+b - f(x) - b)\,dx = \int_0^{\ln 2} 1 - f(x)\,dx$$

$$S_1 = \int_0^{\ln 2} 1 - e^{2x} - 4e^{x} + 3\,dx = \int_0^{\ln 2} +e^{2x} - 4e^{x} + 4\,dx$$

$$S_1 = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 4e^{x} + 4x\right]_0^{\ln 2} = \left(\frac{e^{2\ln 2}}{2} - 4\cdot e^{\ln 2} + 4\cdot \ln 2\right) - \left(\frac{e^0}{2} - 4\cdot e^0 - 0\right)$$

$$= (2 - 8 + 4\ln 2) - \left(\frac{1}{2} - 4\right) = \boxed{4\ln 2 - 2.5 = 0.272}$$

$$\boxed{S_1 = 4\ln 2 - 2.5 = 0.272}$$

حل سؤال 5

أ. مجال تعريف الدالة $f(x)=3x\cdot\ln ax$ هو كل x يُحقق $ax>0$ وبما ان $a>0$ إذاً مجال تعريف الدالة $\boxed{x>0}$

ب. معطى أنه للدالة $f(x)$ توجد نقطة قصوى في $x=\frac{1}{3e}$

وهذا معناه أنه:

$$f'\left(\frac{1}{3e}\right)=0$$

نجد $f'(x)$:

$$f'(x)=3\cdot\ln ax+3x\cdot\frac{a}{ax}=3\ln ax+3$$

$$\boxed{f'(x)=3\ln ax+3}$$

$$f'\left(\frac{1}{3e}\right)=0 \longrightarrow f'\left(\frac{1}{3e}\right)=\cancel{3}^{1}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{3e}+3=0 \,/:3$$

$$\ln\frac{a}{3e}+1=0 \Rightarrow \ln\frac{a}{3e}=-1 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{3e}=e^{-1} \Rightarrow \frac{a}{3\cancel{e}}=\frac{1}{\cancel{e}} \Rightarrow \frac{a}{3}=1 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

ج. نعوض $a=3$ ←

$$f(x)=3x\cdot\ln 3x$$
$$f'(x)=3\ln 3x+3$$

تقاطع الدالة f مع المحور x ← $y=0$

$$0=3x\cdot\ln 3x$$

بما ان $x>0$ مجال تعريف الدالة لذلك $3x>0$

$$\Downarrow$$

$$\ln 3x=0 \Longrightarrow 3x=e^{0}=1$$

$$\boxed{x=\frac{1}{3}} \Longrightarrow \left(\frac{1}{3},0\right)$$ تقاطع مع x

د. $$f\left(\frac{1}{3e}\right)=3\cdot\frac{1}{3e}\ln 3\cdot\frac{1}{3e}=-\frac{1}{e}$$

נק' קיצון $\left(\frac{1}{3e},-\frac{1}{e}\right)$

نحدد نوع النقطة بواسطة $f''(x)$

$$f'(x)=3\ln 3x+3$$

$$f''(x)=3\cdot\frac{3}{3x}=\frac{3}{x} \rightarrow f''\left(\frac{1}{3e}\right)=\frac{3}{\frac{1}{3e}}>0$$

اذن $\left(\frac{1}{3e},-\frac{1}{e}\right)$ هي مينيموم.

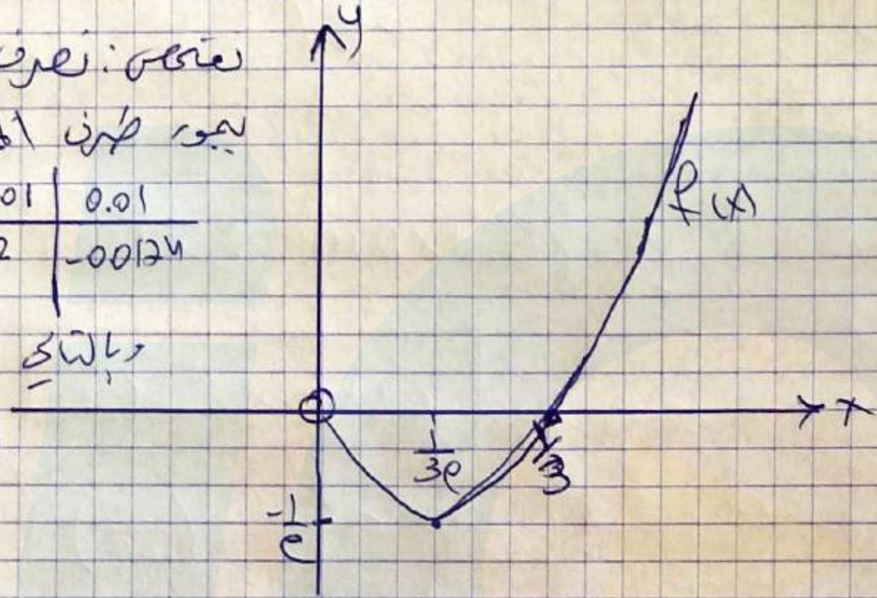
هـ -

تفحص: تعرف الدالة بجوار طرف المجال $x=0$

x	-0.001	0.01
$f(x)$	-0.002	-0.0124

وبالتالي $x=0$ ثقب

$(0,0)$ ثقب



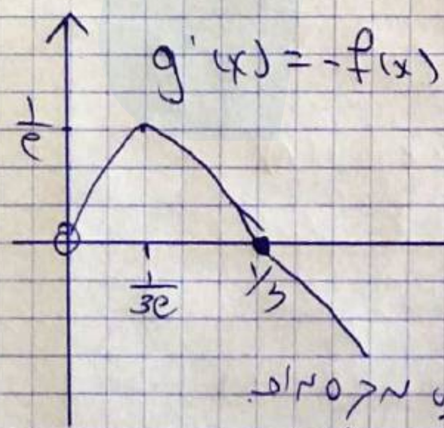
و. لحسب المعطيات $g'(x)=-f(x)$ و $g(x)$ معرفه بنفس مجال $f(x)$

نحسب رسم الدالة $f(x)$ وبما ان $g'(x)=-f(x)$ لذلك

رسم الدالة $g'(x)$ كالتالي

وحسب الرسم يتحقق

$$g'(1/3)=0$$



أي أن $x=-\frac{1}{3}$ نقطة صفرية

للمشتقة وقبلها الدالة $g'(x)$ موجبة

وبعدها سالبة اي أن $x=-\frac{1}{3}$ هي مكسيمام.

g'	$+ + + +$	0	$- - - -$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

$\boxed{x=-\frac{1}{3} \text{ مكسيمام لـ } g}$