حل نموذج بجروت

(803) 382

موعد صيف (ب)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

* بحسب المعطيات يطلب المركز الجماهيري لدورات الرسم 5 اسطوانات ورق وعلبتي الوان لكل مشترك.

* تكلفة 5 اسطوانات ورق وعلبتي الوان للصغار 180 شيكل

* سعر اسطوانة الورق الواحدة للكبار اغلى بـ 40% من سعر اسطوانة الورق للصغار

لذلك اذا فرضنا سعر اسطوانة الورق الواحدة لدورة الصغار $\underline{X}$ اذاً سعر اسطوانة الورق الواحدة للكبار ~~X~~ 140% او $\frac{140}{100}X$ ← $\boxed{1.4X}$

اذاً: سعر اسطوانة ورق واحدة للصغار X

سعر اسطوانة ورق واحدة للكبار: 1.4X

وبالتالي:

سعر 5 اسطوانات ورق للصغار 5X

سعر 5 اسطوانات ورق للكبار $5(1.4X) \rightarrow 7X$

* سعر علبة الالوان التي يطلبها المركز **للكبار** أغلى بـ 60% من سعر علبة الالوان الواحدة للصغار

نفرض سعر علبة الالوان الواحدة للصغار y

اذا سعر علبة الالوان الواحدة للكبار 160%y أي 1.6y

وبالتالي:

سعر علبتي الوان للصغار 2y

سعر علبتي الوان للكبار $2(1.6y) \rightarrow 3.2y$

تكلفة 5 اسطوانات وعلبتي ألوان للكبار هي 273 شيكل

اذا:

للصغار: 5 اسطوانات + 2 علب الوان = 180

اي $\boxed{180 = 2y + 5x}$

للكبار: 5 اسطوانات + 2 علب الوان = 273

$\boxed{273 = 3.2y + 7x}$

حصلنا على معادلتين بمتغيرين:

$$5x+2y=180 \quad \times 7$$
$$7x+3.2y=273 \quad \times 5$$

$$\Rightarrow 35x+14y=1260$$ (نطرح المعادلتين)
$$-\ 35x+16y=1365$$
$$0+14y-16y=1260-1365$$
$$-2y=-105 \Rightarrow y=\frac{-105}{-2}$$

$$\boxed{y=52.5}$$

سعر علبة الالوان للصغار 52.5 شيكل

* وبالتالي سعر علبة الالوان للكبار $3.2y = 3.2(52.5) = 168$ شيكل

نجد سعر اسطوانة الورق الواحدة للصغار:

$$2y+5x=180$$
$$2\cdot(52.5)+5x=180$$
$$105+5x=180 \Rightarrow 5x=180-105$$
$$\Rightarrow 5x=75 \Rightarrow \boxed{x=15}$$

اذا سعر اسطوانة الورق الواحدة لدورة الصغار 15 شيكل

التلخيص:

سعر اسطوانة الورق لدورة الصغار 15 شيكل

سعر علبة الالوان الواحدة لدورة الصغار 52.5 شيكل

ت- عدد المشتركين الكلي في مجموعة الصغار 58

عدد المشتركين الكلي في مجموعة الكبار 62

نجد المبلغ المتبقي للمركز الجماهيري من كل دورة :-

مدخول دورات الصغار: $58 \cdot 1500 = 87000$

تكلفة الطلاب الصغار: $58 \cdot 180 = 10440$ −

ربح المركز من دورات الصغار $= 76560$

مدخول دورات الكبار: $62 \cdot 1500 = 93000$

تكلفة الكبار : $62 \cdot 273$ 16926

ربح المركز من دورات الكبار 76074

اذا ربح المركز من دورات الكبار 76074

ربح المركز من دورات الصغار 76560

* اي ان ربح المركز (المبلغ المتبقي للمركز) من دورات الصغار أكبر

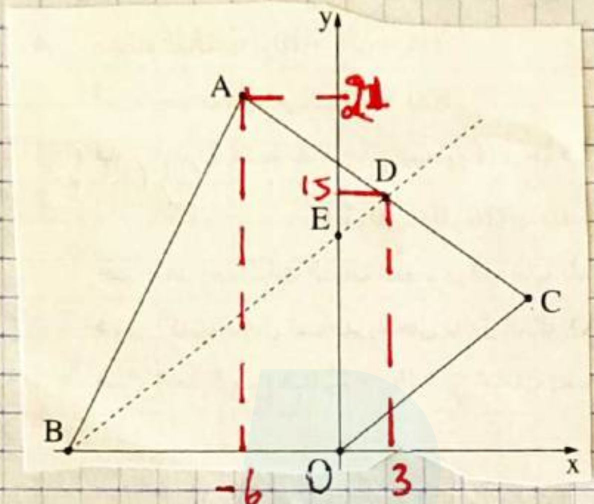
حل سؤال 2

أ. نفرض ان النقطة C هي (x_c, y_c)

بما ان D منتصف AC اذاً

بحسب قانون منتصف قطعة

يتحقق :-



$x_D = \frac{x_A + x_c}{2}$	$y_D = \frac{y_A + y_c}{2}$
$3 = \frac{-6 + x_c}{2}$	$15 = \frac{21 + y_c}{2}$
$6 = -6 + x_c$	$30 = 21 + y_c$
$6 + 6 = x_c$	$30 - 21 = y_c$
$\boxed{12 = x_c}$	$\boxed{9 = y_c}$

$\Leftarrow$ $\boxed{C:(12,9)}$

ب. 1. المستقيم BD يوازي OC اي لهم نفس الميل

ميل OC = ميل BD

نجد ميل OC:

C:(12,9) ; O(0,0)

ميل OC $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-0}{12-0} = \frac{9}{12}$

$\boxed{\text{ميل } OC = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{ميل } BD = \frac{3}{4}}$

ب. 2. المستقيم BD ميله 2 ويمر ب D:(3,15)

معادلة BD من الصورة $y = mx + n$

نعوض $m = \frac{3}{4}$ والنقطة D(3,15) ونحصل على:

$15 = \frac{3}{4} \cdot 3 + n$

$15 = \frac{9}{4} + n \Longrightarrow 15 - \underset{2.25}{\frac{9}{4}} = n \Longrightarrow 12.75 = n$

اذاً معادلة BD هي

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x + 12.75}$$

$BD: y=\frac{3}{4}x+12.75$.د

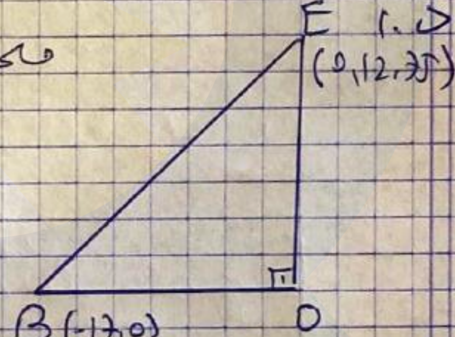
النقطة E هي تقاطع المستقيم مع المحور y
وهي دائماً مساوية لـ n من معادلة المستقيم أي
ان احداثيات E هي $\boxed{E:(0,12.75)}$

النقطة B هي تقاطع المستقيم مع المحور X اي $y_B=0$
وهي من الصورة $B:(x_B,0)$ وبالتالي :-

$$0=\frac{3}{4}x+12.75 \Rightarrow -12.75=\frac{3}{4}x \;/\times 4$$

$$\rightarrow -51=3x \rightarrow -\frac{51}{3}=x \rightarrow \boxed{-17=x}$$

$$\boxed{B:(-17,0)}$$



محيط المثلث = $BE+OB+OE$

$OB=17 \;//\; OE=12.75$

المثلث قائم الزاوية ولذلك

$$BE^2=OB^2+OE^2$$

$$BE^2=17^2+(12.75)^2 \Rightarrow BE^2=289+162.5625$$

$$BE^2=451.5625 \qquad BE=\sqrt{451.5625}=21\tfrac{1}{4}$$

محيط المثلث = $21\frac{1}{4}+12.75+17=51$

$\boxed{\text{محيط المثلث OBE هو 51}}$

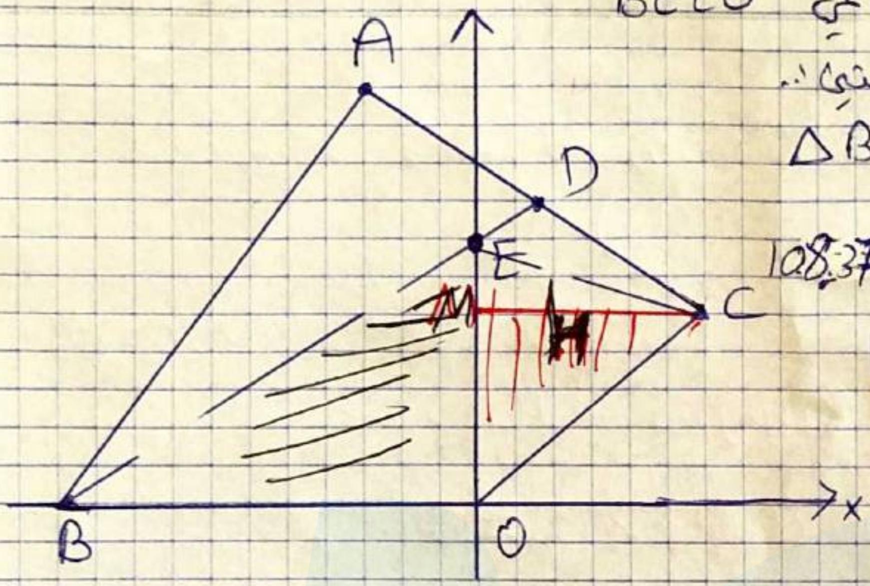
هـ. مساحة المثلث BOE هو $\frac{EO\cdot OB}{2} \leftarrow \frac{12.75\cdot 17}{2}$

$\boxed{\text{مساحة المثلث} = 108.375}$

ع. مساحة الشكل الرباعي BECO

عبارة عن مساحة مثلثين:

ΔBEO و ΔECO



مساحة ΔBEO هي: 108.375

(حسب البند السابق)

مساحة ΔECO هي:

$$S_{\Delta ECO} = \frac{EO \cdot CM}{2}$$

$E(0,12.75)$ $\quad EO = 12.75$

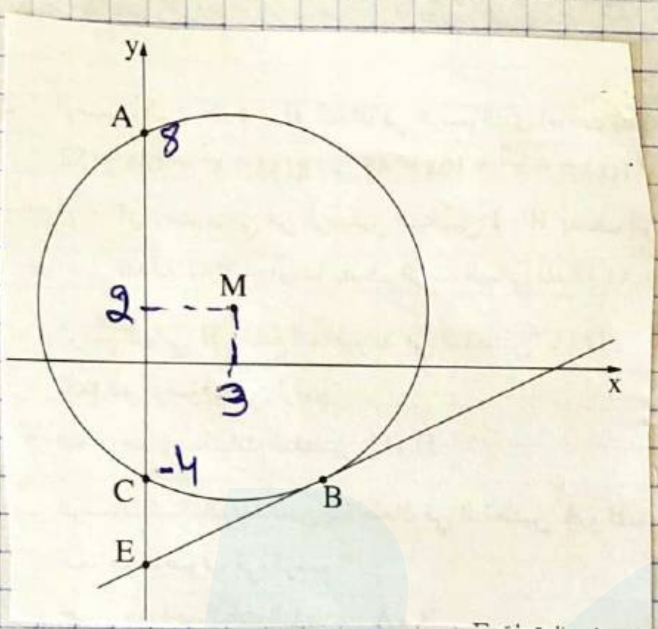
$C(12,9)$ $\quad CM = 9 - 0 = 9$

$$S_{\Delta ECO} = \frac{(12.75)(9)}{2} = 76.5$$

$$S_{BECO} = 108.375 + 76.5$$

$$\boxed{S_{BECO} = 184.875}$$

حل سؤال 3



الصورة العامة لمعادلة دائرة هي:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

بحيث (a,b) مركز الدائرة
و R نصف قطرها

بحسب المعطيات:
مركز الدائرة $M(3,2)$

و $R=MA$ ، نجد طول MA:

$A(0,8)$ $M(3,2)$

$$R=MA=\sqrt{(0-3)^2+(8-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(6)^2}=\sqrt{9+36}$$

$$R=\sqrt{45}$$

وبالتالي معادلة الدائرة:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{45})^2$$

$$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=45}$$

ب. بما أن BC يوازي المحور x اذاً $y_B=y_C \Leftarrow B(x_B,-4)$

نعوض $y=-4$ بالدائرة ونجد x

$$(x-3)^2+(-4-2)^2=45 \Rightarrow (x-3)^2+(-6)^2=45$$

$$(x-3)^2+36=45 \Rightarrow (x-3)^2=45-36 \Rightarrow (x-3)^2=9$$

$$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{9}$$

$x-3=3$ $x-3=-3$

$x=3+3$ $x=-3+3=0$

$\boxed{x=6}$ $\boxed{x=0}$

ولكن بما أن x_B موجب لذلك $B:(6,-4)$

ج- نبرهن أن مركز الدائرة M هو منتصف القطعة AB وبالتالي AB قطر

$B:(6,-4)$, $A:(0,8)$ $M(3,2)$

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ $\qquad$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

$3 = \frac{0+6}{2} = 3$ ✓ $\qquad$ $2 = \frac{8+(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ✓

إذاً M هي منتصف AB وبالتالي AB قطر.

د. المماس للدائرة في النقطة B هو مستقيم يُعامد لنصف القطر MB. نجد ميل MB ومن ثم نجد ميل المماس.

$B(6,-4)$ و $M(3,2)$

ميل $_{MB}$ $= \frac{2-(-4)}{3-6} = \frac{6}{-3} = -2$

$\boxed{\text{ميل } MB = -2}$ وبالتالي ميل المماس هو:

ميل المماس $= \frac{-1}{\text{ميل } MB} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

إذاً ميل المماس هو $\frac{1}{2}$ ويمر بـ $B(6,-4)$

وبالتالي: $y = mx + n$ نعوض الميل والنقطة:

$-4 = \frac{1}{2} \cdot 6 + n \Rightarrow -4 = 3 + n \Rightarrow$

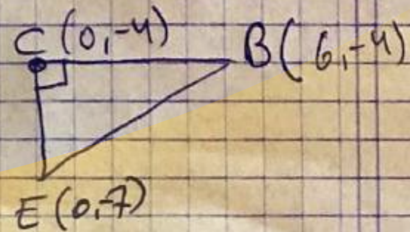
$\Rightarrow -4 - 3 = n \Rightarrow \boxed{-7 = n}$

معادلة المماس هي: $\boxed{y = \frac{1}{2}x - 7}$

هـ- نجد إحداثيات E

E هي تقاطع المماس مع محور y ولذلك الإحداثي y للنقطة E هو -7 أي $E(0,-7)$

$S_{\triangle ECB} = \frac{EC \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$



$EC = -4 - (-7) = 3$

$BC = 6 - 0 = 6$

حل سؤال 4

$$f(x) = 2x - 10\sqrt{x}$$

أ. مجال تعريف الدالة $x > 0$

ب. نفحص اي نقاط تحقق الدالة بواسطة التعويض.

$(0,0) \Rightarrow f(0) = 2\cdot 0 - 10\cdot\sqrt{0} = 0 - 0 = 0$

اذاً $(0,0)$ تقع على الرسم البياني للدالة $f(x)$

$(16,0) \Rightarrow f(16) = 2\cdot 16 - 10\cdot\sqrt{16} = 32 - \overset{40}{\overline{10\cdot 4}} = -4 \neq 0$

النقطة $(16,0)$ لا تقع على الرسم البياني لـ f.

$(25,0) \Rightarrow f(25) = 2\cdot 25 - 10\cdot\sqrt{25} = 50 - \overset{50}{\overline{10\cdot 5}} = 0$

اذاً النقطة $(25,0)$ تقع على الرسم البياني لـ f.

$(9,0) \Rightarrow f(9) = 2\cdot 9 - 10\cdot\sqrt{9} = 18 - \overset{30}{\overline{10\cdot 3}} = -12 \neq 0$

اذاً النقطة $(9,0)$ لا تقع على الدالة f

للاجمال: النقاط $(0,0)$ و $(25,0)$ تقع على الرسم البياني لـ f

ج. النقاط القصوى تحقق $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2 \cdot -10\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 - \frac{5}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{5}{\sqrt{x}} \underset{\times\sqrt{x}}{\Rightarrow} 2\sqrt{x} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 2.5 \quad ()^2 \Rightarrow x = (2.5)^2 = 6.25$$

نجد y:

$$f(6.25) = 2(6.25) - 10\sqrt{6.25}$$

$$f(6.25) = 12.5 - 10\cdot 2.5 = 12.5 - 25 = -12.5$$

اذاً النقطة القصوى $(6.25, -12.5)$

نصنّف النقطة القصوى ونحدد نوعها:

x	0	$x=1$ $0<x<2.25$	6.25	$x=9$ $x>6.25$
$f'(x)$	‖	−	0	+
$f(x)$	‖	↘	min	↗

$(6.25, -12.5)$

min - מינימום

$$f'(1) = 2 - \frac{5}{\sqrt{1}} = 2 - \frac{5}{1} = 2 - 5 = -3 < 0$$

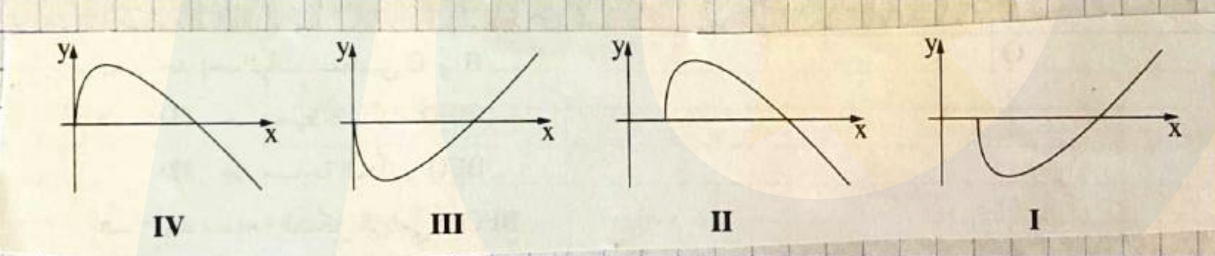
$$f'(9) = 2 - \frac{5}{\sqrt{9}} = 2 - \frac{5}{3} = 2 - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$$

ه. مجالات تصاعد وتنازل الدالة

مجال تصاعد الدالة $x > 6.25$

مجال تنازل الدالة $0 < x < 6.25$

و.



بحسب نتائج البنود السابقة $(6.25, -12.5)$ هي נק' מינימום للدالة وبالتالي الرسمان II و IV غير ملائمان.

الرسم 3 يقطع المحور x بنقطتان $(0,0)$ ونقطة أخرى وهذا يلائم النتائج التي حصلنا عليها في البند (ج) وان نقاط التقاطع مع المحور x هي $(0,0)$ و$(25,0)$ ولذلك الرسم الملائم هو $\boxed{III}$

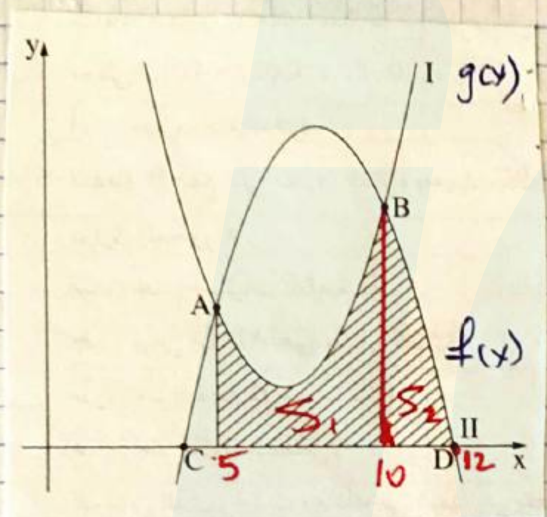
انتبه الرسم I لا يقطع المحور x في $(0,0)$ ولذلك غير ملائم

حل سؤال 5

(أ) $f(x)=-x^2+16x-48$ // $g(x)=x^2-14x+52$

في الدالة $g(x)$ العدد المضروب بـ x^2 هو 1 اي موجب
ولذلك رأس الدالة التربيعية $g(x)$ هو مينيموم اي تلائم
الرسم I وبالتالي $f(x)$ تلائم الرسم II

(ب) النقاط C و D هي تقاطع $f(x)$ مع المحور x ⟸ $f(x)=0$



$$f(x)=-x^2+16x-48=0$$

$$a=-1 \quad b=16 \quad c=-48$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\mp\sqrt{16^2-4(-1)(-48)}}{2(-1)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\mp\sqrt{256-192}}{-2}=\frac{-16\mp\sqrt{64}}{-2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\mp8}{-2} \quad \begin{cases} x_1=\frac{-16+8}{-2}=4 \\ x_2=\frac{-16-8}{-2}=12 \end{cases}$$

اذا: $\boxed{C:(4,0) \quad D(12,0)}$

(ج) النقاط A و B هي نقاط تقاطع الرسمين اي تحقق $f(x)=g(x)$

$$\Rightarrow -x^2+16x-48=x^2-14x+52 \Rightarrow x^2+x^2-14x-16x+52+48=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-30x+100=0$$

نحل المعادلة التربيعية الناتجة $a=2 \quad b=-30 \quad c=100$

$$x_{1,2}=\frac{-(-30)\mp\sqrt{(-30)^2-4(2)(100)}}{2\cdot2}=\frac{30\mp\sqrt{900-800}}{4}$$

$$x_{1,2}=\frac{30\mp\sqrt{100}}{4}=\frac{30\mp10}{4} \quad \begin{cases} x_1=\frac{40}{4}=10 & B(10,y_B) \\ x_2=\frac{20}{4}=5 & A(5,y_A) \end{cases}$$

نجد:

$$g(5)=\overbrace{5^2}^{25}\overbrace{-14\cdot5}^{-70}+52=7 \Rightarrow \boxed{A(5,7)}$$

$$g(10)=\overbrace{10^2}^{100}\overbrace{-14\cdot10}^{-140}+52=12 \Rightarrow \boxed{B:(10,12)}$$

د) المساحة المخططة يمكن التعبير عنها كمجموع مساحتين S_1 و S_2 بحيث

S_1 هي المساحة بين الدالة $g(x)$ والمحور x في $[5,10]$

S_2 هي المساحة بين الدالة $f(x)$ والمحور x في $[10,12]$

$$S_1 = \int_5^{10} (x^2 - 14x + 52)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 14\cdot\frac{x^2}{2} + 52x\right]_5^{10}$$

$$S_1 = \left[\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 52x\right]_5^{10} = \left(\frac{10^3}{3} - 7\cdot10^2 + 52\cdot10\right) - \left(\frac{5^3}{3} - 7\cdot5^2 + 52\cdot5\right)$$

$$S_1 = 153\tfrac{1}{3} - 126\tfrac{2}{3} = 26\tfrac{2}{3} \Rightarrow \boxed{S_1 = 26\tfrac{2}{3}}$$

$$S_2 = \int_{10}^{12} (-x^2 + 16x - 48)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 16\cdot\frac{x^2}{2} - 48\cdot x\right]$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 8x^2 - 48x\right]_{10}^{12} = \left(-\frac{12^3}{3} + 8\cdot12^2 - 48\cdot12\right)$$

$$-\left(\frac{10^3}{3} + 8\cdot10^2 - 48\cdot10\right)$$

$$= 13\tfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{S_2 = 13\tfrac{1}{3}}$$

المساحة المخططة $= S_1 + S_2 = 26\tfrac{2}{3} + 13\tfrac{1}{3} = 40$

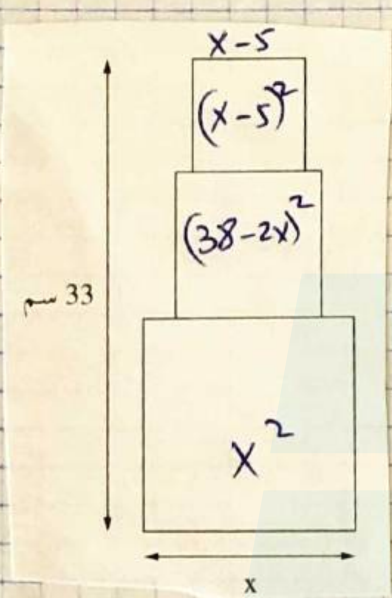
$\boxed{\text{المساحة المخططة} = 40}$

حل سؤال 6

(أ) x - طول ضلع المربع السفلي

العلوي طوله أصغر بـ 5 سم من السفلي

لذلك طول العلوي $x-5$



نفرض طول ضلع المربع الأوسط y

إذاً يتحقق:

$$x + y + x - 5 = 33$$

الارتفاع الكلي للمربعات 33 سم.

$$y + 2x - 5 = 33 \Rightarrow y = 33 + 5 - 2x$$

$$\boxed{y = 38 - 2x}$$

$\boxed{\text{طول ضلع المربع الأوسط } 38-2x}$

مساحة المربع الأصغر (العلوي) $(x-5)^2$

مساحة المربع الأوسط $(38-2x)^2$

مساحة المربع السفلي x^2

(ب)

دالة مجموع مساحتهم

$$f(x) = x^2 + (38-2x)^2 + (x-5)^2$$

$$f(x) = x^2 + (1444 - 152x + 4x^2) + (x^2 - 10x + 25)$$

$$f(x) = x^2 + 4x^2 + x^2 - 152x - 10x + 1444 + 25$$

$$\boxed{f(x) = 6x^2 - 162x + 1469}$$

$$f'(x) = 12x - 162 = 0 \Rightarrow 12x = 162$$

$$x = \frac{162}{12} = 13.5 \qquad \boxed{x = 13.5}$$

نبرهن ان $x=13.5$ مينيمام.

x	$x=10$	13.5	$x=14$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(10)=\overset{120}{12\cdot 10}-162=-42<0$

$f'(14)=\overset{168}{12\cdot 14}-162=6>0$

$\boxed{\text{مينيمام } x=13.5}$

ج- اصغر مجموع للمساحات هو $f(13.5)$
نعوض بالدالة:

$f(x)=6x^2-162x+1469$

$f(13.5)=6\cdot(13.5)^2-162(13.5)+1469$

$f(13.5)=1093.5-2187+1469$

$f(13.5)=375.5$