حل نموذج بجروت

(805) 482

موعد مُتعدرين

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

السؤال الاول

$$a_n = 2n-3$$
$$b_n = 3a_n+5$$

(أ) ① نجد اولاً a_1:

$$a_1 = 2\cdot 1 - 3$$
$$\boxed{a_1 = -1}$$

ثم نعوض في معادلة b_n:

$$b_1 = 3\cdot a_1 + 5$$
$$b_1 = \underbrace{3\cdot(-1)}_{-3} + 5$$
$$\boxed{b_1 = 2}$$

② اذا تحقق ان $b_{n+1} - b_n = d$ (d عدد حقيقي) اذاً المتوالية b_n هي متوالية حسابية.

$$b_{n+1} = 3\cdot a_{n+1} + 5$$

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n+2-3 = \boxed{2n-1}$$

نعوض a_{n+1} في معادلة b_{n+1}:

$$b_{n+1} = 3(2n-1) + 5 = 6n-3+5$$
$$\boxed{b_{n+1} = 6n+2}$$

$$b_n = 3\cdot a_n + 5$$

نعوض $a_n = 2n-3$ في معادلة b_n

$$b_n = 3(2n-3) + 5$$

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

$$b_n = 6n - 9 + 5$$
$$\boxed{b_n = 6n-4}$$

$$b_{n+1}-b_n = 6n+2-(6n-4) = 2+4 = 6$$

اذا المتوالية b_n هي متوالية حسابية.

(ب) بما ان b_n هي متوالية حسابية اذا نتحقق:

$$b_n = b_1 + d(n-1)$$

$$\boxed{b_n = 2+6(n-1)}$$

نعوض $b_n=110$ لنجد n (عدد حدود المتوالية):

$$110 = 2+6n-6$$

$$110 = 6n-4$$

$$114 = 6n$$

$\boxed{n=19}$ حد يوجد في المتوالية b_n.

(ج) عدد حدود المتوالية a_n = عدد حدود المتوالية b_n = 19.

عدد الحدود الفردية في المتوالية a_n هو:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{19+1}{2} = 10 \text{ حدود}$$

نجد الفرق بين كل حد وحد في المتوالية a_n:

$$a_{n+1}-a_n = 2(n+1)-3-(2n-3) = \cancel{2n}+2\cancel{-3}\cancel{-2n}\cancel{+3}$$

$$a_{n+1}-a_n = \boxed{2}$$

بينما الفرق بين كل حد فردي والحد الفردي الذي يليه

هو $D = 2d = 2\cdot 2 = \underline{4}$

من هنا نجد مجموع الحدود الفردية:

$$S = \frac{n}{2}\left(2a_1 + D(n-1)\right)$$

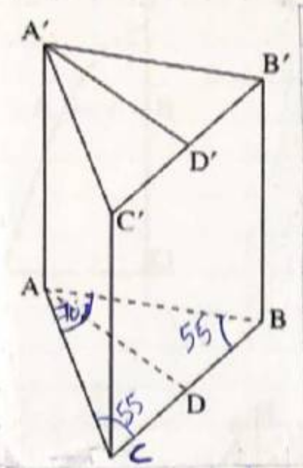
$\boxed{a_1=-1}$, $\boxed{D=4}$, $\boxed{n=10}$

$$S = \frac{10}{2}\left(2(-1) + \overset{36}{4(10-1)}\right) = 5\cdot 34 = \boxed{170}$$

مجموع الحدود في الاماكن الفردية في المتوالية a_n.

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

السؤال الثاني :



$\measuredangle BAC = 70°,\quad AB = AC$

$V = 1{,}190 \quad , \quad BC = 14$

(א) نجد اولاً مقدار زوايا القاعدة في ΔABC :

$$\measuredangle BCA = \measuredangle ABC = \frac{180° - \measuredangle BAC}{2}$$

وذلك لان ΔABC متساوي الساقين

$$\Rightarrow \measuredangle BCA = \measuredangle ABC = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$$ درجة

مقدار زوايا القاعدة في ΔABC .

من هنا وحسب قانون sin الموسع نجد مقدار الساق AB و AC :

$$\frac{AB}{\sin(\measuredangle ACB)} = \frac{BC}{\sin(\measuredangle CAB)}$$

$$\frac{AB}{\sin(55°)} = \frac{14}{\sin(70°)}$$

$$AB = \frac{14 \cdot \sin(55°)}{\sin(70°)}$$

$AB = 12.204$ وحدات طول

حجم المنشور هو مساحة القاعدة ضرب الارتفاع .

$$V = S_{\Delta ACB} \cdot A'A$$

$$1{,}190 = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin(\measuredangle CAB)}{2} \cdot A'A$$

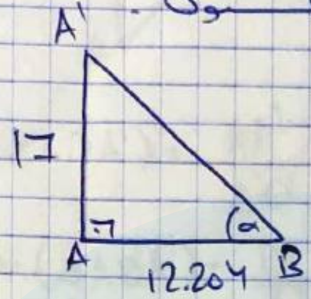
$$1.190 = \frac{(12.204)^2 \cdot \sin(70°)}{2} \cdot A'A$$

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

$\boxed{A'A = 17}$ وحدات طول

(ب) الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين مسقط المستقيم على المستوى وكعب المستقيم (كعب المستقيم هو نقطة التقاء المستقيم مع المستوى).

من هنا الزاوية بين $A'B$ والمستوى ABC هي $\measuredangle A'BA$.
بحيث B هي كعب المستقيم و AB هو مسقط المستقيم $A'B$ على المستوى.

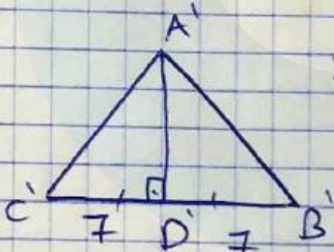


في $\triangle A'AB$:

$$\tan(\measuredangle A'BA) = \frac{A'A}{AB}$$

$$\tan(\measuredangle A'BA) = \frac{17}{12.204}$$

$$\boxed{\measuredangle A'BA = 54.33^\circ}$$



(ج) نجد أولًا طول $A'D'$:

$$C'D' = D'B' = \frac{14}{2} = 7$$

$$\measuredangle C'A'D' = \frac{\measuredangle C'A'B'}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

$$\frac{C'D'}{A'D'} = \tan(35^\circ)$$

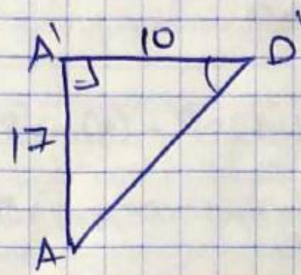
$\Leftarrow$

$$\frac{7}{A'D'} = \tan(35^\circ)$$

$A'D' = 9.997 \approx 10$ وحدات طول.

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

وحسب النظرية التي تنص على ان كل مستقيم عامودي على
مستقيمين في المستوى يعامد كل مستقيم في المستوى
بالتالي بما ان $A'B' \perp AA'$ و $A'A \perp A'C'$ اذا $A'D' \perp AA'$ ايضا



$\Delta AD'A'$

$$\tan(\measuredangle AD'A') = \frac{AA'}{A'D'}$$

$$\tan(\measuredangle AD'A') = \frac{17}{10}$$

$$\boxed{\measuredangle AD'A' = 59.53^\circ}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

السؤال الثالث:

$f(x) = 2\cdot\sin(x) + \cos(2x) - 1$

$0 \le x \le \pi$

$f'(x) = 2\cdot\cos(x) - \sin(2x)\cdot 2$ (P)

$0 = 2(\cos(x) - \sin(2x))$

حسب المتطابقة:

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$

$\Rightarrow 0 = 2(\cos(x) - 2\sin(x)\cdot\cos(x))$

$0 = 2\cos(x)(1 - 2\sin(x))$

$\cos(x) = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k=0$ $\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$k=1$ $\cancel{x = 1.5\pi}$
خارج مجال التعريف.

$1 = 2\sin(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$k=0$: $\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

$k=1$, $\cancel{x = 2\frac{1}{6}\pi}$
خارج مجال التعريف

$\sin(x) = \sin(180 - x)$

$\frac{1}{2} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6})$

$\sin(\frac{5\pi}{6})$

$\boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$ من هنا أيضا:

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - 1 = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) - 1 = \underline{0}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) - 1 = \underline{\frac{1}{2}}$$

ونجد احداثيات الاطراف :

$$f(0) = 2\sin(0) + \cos(0) - 1 = \underline{0}$$

$$f(\pi) = 2\sin(\pi) + \cos(2\pi) - 1 = \underline{0}$$

من هنا : النقاط القصوى ⇐
ونحسب الرسم نجد نوع هذه النقاط:

$\boxed{(\text{طرف})\ \min(0,0)}$

$\boxed{\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.5\right)}$

$\boxed{\min\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$

$\boxed{\max\left(\frac{5\pi}{6}, 0.5\right)}$

$\boxed{(\text{الطرف})\ \min(\pi, 0)}$

ب) ① ميل المماس هو قيمة المشتقة للاحداثي x للنقطة العظمى.
ومن البند السابق نستنتج ان ميل المماس في هذه النقطة
هو $\underline{0}$.

من هنا معادلة المماس

$$y = b$$

والاحداثي y للنقطة العظمى هو $y=0.5$

اي معادلة المماس هو:

$$\boxed{y=0.5}$$

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

② المساحة المطلوبة :

$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} (\text{المماس} - \text{الدالة})\, dx$$

$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{1}{2} - \left(2\sin(x) + \cos(2x) - 1\right)\right] dx$$

$$S = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} -2\sin(x) - \cos(2x) + \frac{3}{2}\, dx$$

$$S = \left[2\cos(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{2}x\right]_0^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$S = \overbrace{\left(2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)}{2} + \frac{3 \cdot 5\pi}{6 \cdot 2}\right)}^{2.626} - \left(\overbrace{2\cos(0)}^{2} - \overbrace{\frac{\sin(0)}{2}}^{0} + 0\right)$$

$$\boxed{S = 0.626 \text{ وحدات مساحة}}$$

ج) $g(x) = f(x) - c \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$

نستنتج ان $g(x)$ هي ازاحة عامودية للدالة $f(x)$ (بمحور y) بالتالي من اجل ان يكون للدالة $g(x)$ ٤ نقاط تقاطع مع محور x يجب ازاحتها الى الاسفل بعدد وحدات اصغر من احداثي ال y للنقاط القصوى (اي اصغر من 0.5) وبالضرورة اكبر من 0 .

من هنا : $\underline{0 < c < 0.5}$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

السؤال الرابع :

$$f(x) = e^{2x} \quad , \quad g(x) = e^{3-x}$$

(أ) تقاطع $f(x)$ مع المحور :

y ،

$f(0) = e^{0} = 1$

$\boxed{(0,1)}$

x ،

$0 = e^{2x}$

$2x = \ln(0)$

$\varnothing$ لا يوجد تقاطع مع محور x.

تقاطع $g(x)$ مع المحور :

y ،

$g(0) = e^{3-0}$

$g(0) = e^{3}$

$\boxed{(0,e^{3})}$

x ،

$0 = e^{3-x}$

$3-x = \ln(0)$

$\varnothing$ لا يوجد تقاطع مع محور x

(ب) $f'(x) = e^{2x} \cdot 2$

بما ان e^{2x} موجبة لكل x اذا $f'(x)$ موجبة لكل x

من هنا : مجالات تصاعد وتنازل الدالة :

$f(x)$:

$\uparrow$: كل x , $\downarrow$: $\varnothing$

$g'(x) = e^{3-x}(-1)$

بما ان e^{3-x} موجب لكل x اذا $(g'(x) = + \cdot - = -)$ سالبة لكل x بالتالي :

$g(x)$:

$\uparrow$: $\varnothing$, $\downarrow$: كل x

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

$f(x)=g(x)$ ① (ب)

$e^{3-x}=e^{2x}$

$3-x=2x$

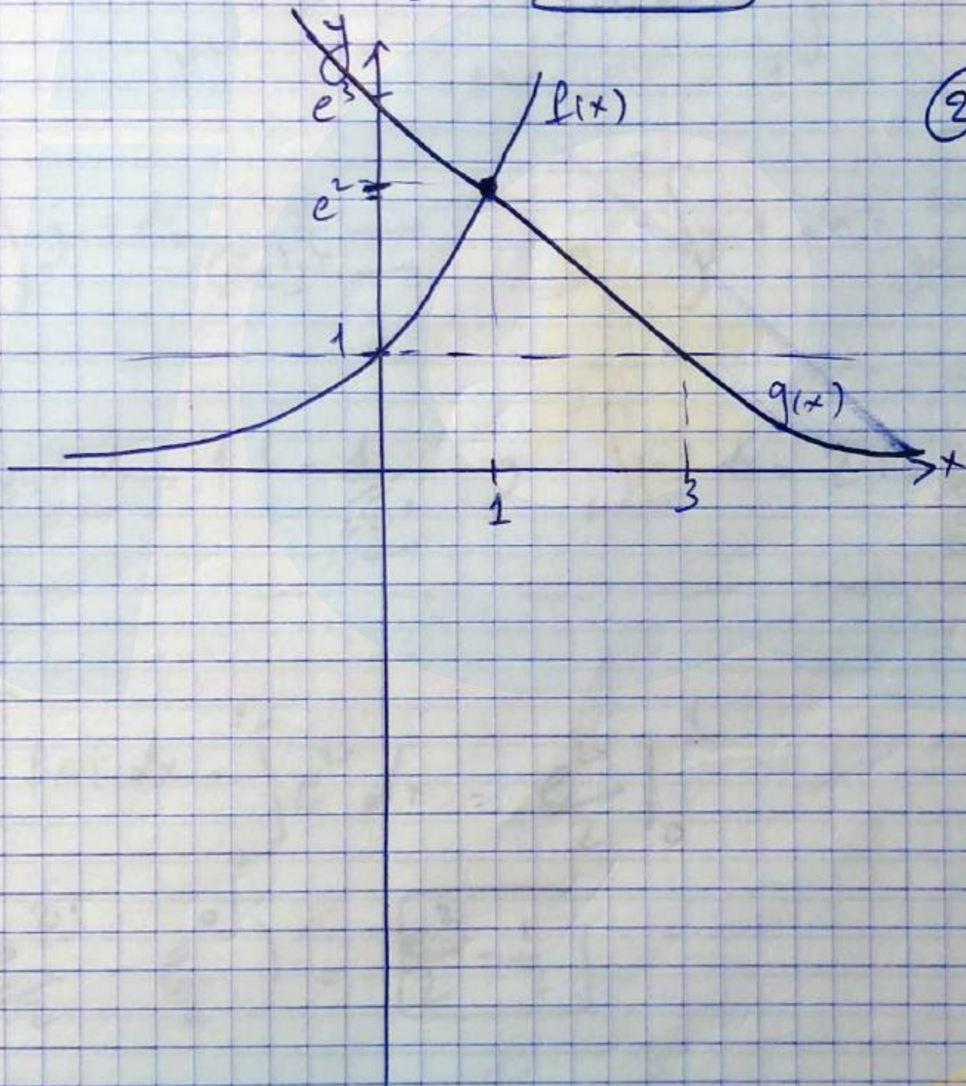
$3=3x$

$\boxed{x=1}$

$f(1)=e^{2\cdot 1}=e^{2}$

$\Leftarrow \boxed{(1,e^{2})}$ تقاطع الدالتين $f(x)$ و $g(x)$.

②



1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

3) نجد تقاطع $g(x)$ مع المستقيم $y=1$:

$$1 = e^{3-x}$$
$$\ln(1) = 3-x$$
$$0 = 3-x$$
$$\boxed{x=3}$$

المساحة المطلوبة :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 y=1\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx - \int_1^3 y=1\,dx$$

* $\int_0^1 y=1\,dx =$ مساحة مستطيل (مربع) و $\int_1^3 y=1\,dx =$ مساحة مستطيل

$\int_0^1 y=1\,dx = 1\cdot 1 = 1$ وحدة مساحة و $\int_1^3 y=1\,dx = 2\cdot 1 = 2$ وحدة مساحة

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1$$

$$\left(\frac{e^{2\cdot 1}}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$\int_1^3 g(x)\,dx = \int_1^3 e^{3-x}\,dx = -e^{3-x}\Big|_1^3$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

$$\left(-e^{3-3}-\left(-e^{3-1}\right)\right)=\boxed{-1+e^2}$$

$$\Rightarrow \text{المساحة المطلوبة} = \frac{e^2}{2}\underbrace{-\frac{1}{2}-1}^{-1.5}+\left(-1+e^2-2\right)=$$

$$=\frac{e^2}{2}-1.5-3+e^2=\boxed{\frac{3}{2}e^2-4.5}=\boxed{6.584}$$

وحدات مساحة

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

السؤال الخامس:

$$f(x) = -1 + 2x + \ln(x^2)$$

(أ) $x^2 > 0 \Leftarrow$ $x > 0$ وايضا $x < 0$

$\boxed{x \neq 0}$ مجال تعريف الدالة

(ب)

$x \to 0^+$	$f(x)$
0.01	-10.19
0.001	-14.81
0.0001	-19.42

$x \to 0^-$	$f(x)$
-0.01	-10.23
-0.001	-14.81
-0.0001	-19.42

من هنا $\boxed{x = 0}$ خط تقارب عامودي

(جـ)

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{x^2}}$$

$0 = f'(x)$:

$$\cancel{\frac{2}{0}} = 2x^2 + 2x$$

$$0 = x(x+1)$$

$\cancel{x = 0}$ ملغي $\qquad \boxed{x = -1}$

$$f(-1) = \overbrace{-1 + 2(-1)}^{-3} + \ln\overbrace{((-1)^2)}^{0} = -3$$

	$x < -1$ (-2)	$x = -1$	$-1 < x < 0$ (-0.5)	$x = 0$	$x > 0$ (1)
$f'(x)$	+	0	−		+
$f(x)$	↗	max	↘		↗

$f'(-2) = \frac{8-4}{+} = +$

$f'(-0.5) = \frac{-0.5}{+} = -$

$f'(1) = \frac{+}{+} = +$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

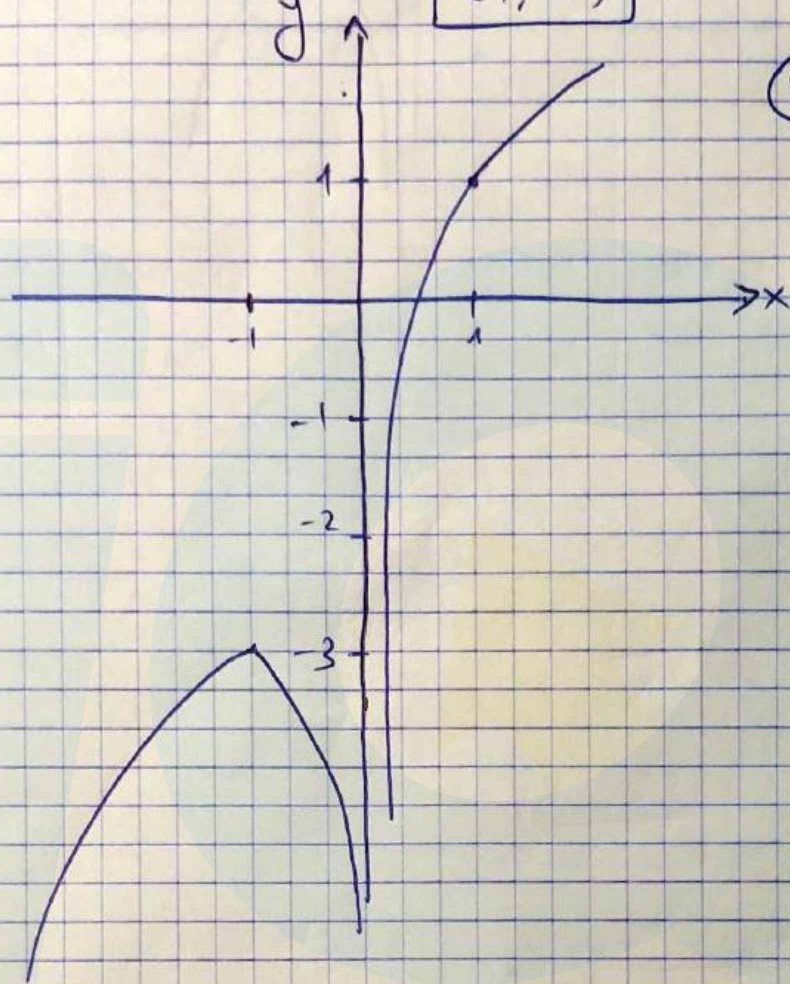
أي النقطة القصوى للدالة $f(x)$:

$\boxed{max(-1,-3)}$

د) ① $f(1) = -1+2\cdot1+\ln(1^2) = 1$

$\boxed{(1,1)}$

②



هـ) $g(x)=f(x)+5$

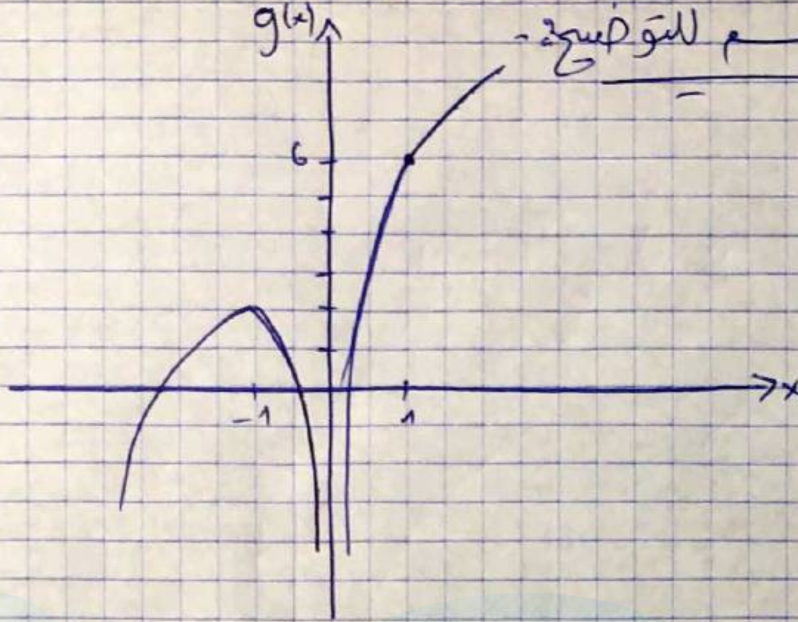
الدالة $g(x)$ هي عبارة عن ازاحة للدالة $f(x)$ 5 وحدات الى اعلى (باتجاه الموجب) في محور y.

أي تصبح النقطة القصوى لـ $g(x)$: $max(-1,2)$

بالتالي يصبح هنالك 3 نقاط تقاطع للدالة $g(x)$ مع محور x

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

رسم للتوضيح



1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il