حل نموذج بجروت

382

موعد متعذرين

شتاء 2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1:

1.أ بحسب المعطيات: ثمن رزمة بسيطة 40 شيكل

ثمن رزمة فاخرة أكبر بـ 70% من ثمن البسيطة

وبالتالي ثمن الرزمة الفاخرة هو 170% من ثمن البسيطة

أي $40 \cdot 170\% \leftarrow 40 \cdot \frac{170}{100} = 4 \cdot 17 = 68$ شيكل

$\boxed{\text{اذاً ثمن رزمة بسيطة 40 شيكل}}$

$\boxed{\text{وثمن رزمة فاخرة 68 شيكل}}$

2.أ بحسب معطيات السؤال اشترى صاحب الدكان 200 رزمة بالمجموع. ولذلك اذا فرضنا انه اشترى X رزم بسيطة

اذاً عدد الرزم الفاخرة هو $(200-X)$

وبحسب المعطيات دفع صاحب الدكان مبلغ 11752 مقابل الـ 200 رزمة، اي

ثمن الرزم البسيطة + ثمن الرزم الفاخرة = 11752

$$40 \cdot X + 68(200-X) = 11752$$

$$40X + 13600 - 68X = 11752$$

$$13600 - 28X = 11752$$

$$13600 - 11752 = 28X$$

$$1848 = 28X \longrightarrow \frac{1848}{28} = X \rightarrow \boxed{66 = X}$$

$\boxed{\text{اذا اشترى صاحب الدكان 66 رزمة بسيطة}}$

وكذلك اشترى $200-66 \rightarrow 134$ رزمة فاخرة.

ب.1 بحسب البند أ. اشترى صاحب الدكان 66 رزمة بسيطة بسعر 40 شيكل للواحدة ولذلك مقابل كل الرزم البسيطة دفع التاجر: $66 \cdot 40 = 2640$ شيكل

باع التاجر الرزم البسيطة بربح 80% اي باع الرزم بـ 180% من المبلغ الذي اشتراها به وبالتالي باع الرزم بمبلغ:

$$180\% \cdot 2640 = \frac{180}{100} \cdot 2640 = 4752 \text{ شيكل}$$

$\boxed{\text{اذا التاجر باع الرزم البسيطة بمبلغ } 4752.}$

ب. المبلغ الذي باع فيه التاجر الرزم الفاخرة كان بربح 75% من المبلغ الذي اشتراها به. 175% من المبلغ الذي اشتراها

المبلغ الذي اشترى فيه صاحب الدكان الرزم الفاخرة هو:

$$134 \cdot 68 = 9112$$

المبلغ الذي باع فيه الرزم الفاخرة هو:

$$9112 \cdot 175\% = 9112 \cdot \frac{175}{100} = 15946$$

اذا المبلغ الذي باع فيه التاجر الرزم الفاخرة هو 15946

قبض التاجر بالمجموع مقابل الرزم الفاخرة والبسيطة مبلغ

$$\boxed{15946 + 4752 = 20698}$$

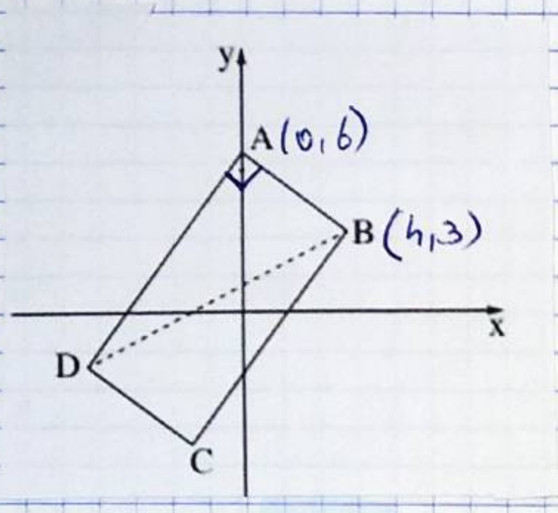
ب.2 من هنا، الربح هو:

$$\underbrace{20698}_{\text{مبلغ البيع الكلي}} - \underbrace{11752}_{\text{التكلفة}} = 8946$$

النسبة المئوية للربح: $100\% \cdot \frac{8946}{11752} = 100\% \cdot 0.7612 \rightarrow 76.12\%$

$\boxed{\text{نسبة الربح } 76.12\%}$

حل سؤال 2



بحسب المعطيات احداثيات A و B

هي A(0,6) B(4,3)

أ) $\text{ميل } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{0-4} = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{\text{ميل } AB = -\frac{3}{4}}$$

ب) الضلع AD يعامد AB لذلك: $(\text{ميل } AB)(\text{ميل } AD) = -1$

$\Rightarrow \text{ميل } AD = \frac{-1}{\text{ميل } AB} \Rightarrow \text{ميل } AD = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

$$\boxed{\text{إذاً ميل } AD = \frac{4}{3}}$$

الضلع AD يمر بالنقطة A ومعادلته من الصورة $y = mx + n$

بحيث m هو الميل و n هي تقاطع المستقيم مع المحور y اي 6

وبالتالي معادلته

$$\boxed{AD: y = \frac{4}{3}x + 6}$$

ج) معادلة القطر BD هي $y = \frac{1}{2}x + 1$

الرأس D عبارة عن تقاطع AD مع BD اي نحل

معادلتين بمتغيرين ونجد D :

$AD: y = \frac{4}{3}x + 6$

$BD: y = \frac{1}{2}x + 1$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = \frac{4}{3}x + 6$

نضرب كل المعادلة بـ 6 $\Rightarrow 6\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 6\left(\frac{4}{3}x + 6\right) \Rightarrow 3x + 6 = 8x + 36$

$\Rightarrow 3x - 8x = 36 - 6 \Rightarrow -5x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{-5} \Rightarrow \boxed{x = -6}$

نجد y ← نعوض في معادلة AD: $\leftarrow y = \frac{4}{3}x + 6$

$y = \frac{4}{3} \cdot -6 + 6 = -8 + 6 = -2 \Longrightarrow \boxed{D(-6,-2)}$

د. مساحة المستطيل = $AB \cdot AD$

$D(-6,-2) \quad B(4,3) \quad A(0,6)$

$$AB = \sqrt{(4-0)^2+(3-6)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\boxed{AB = 5}$$

$$AD = \sqrt{(0-(-6))^2+(6-(-2))^2} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\boxed{AD = 10}$$

مساحة المستطيل $ABCD = AD \cdot AB \Leftarrow 10 \cdot 5 = \boxed{50}$

حل سؤال 3

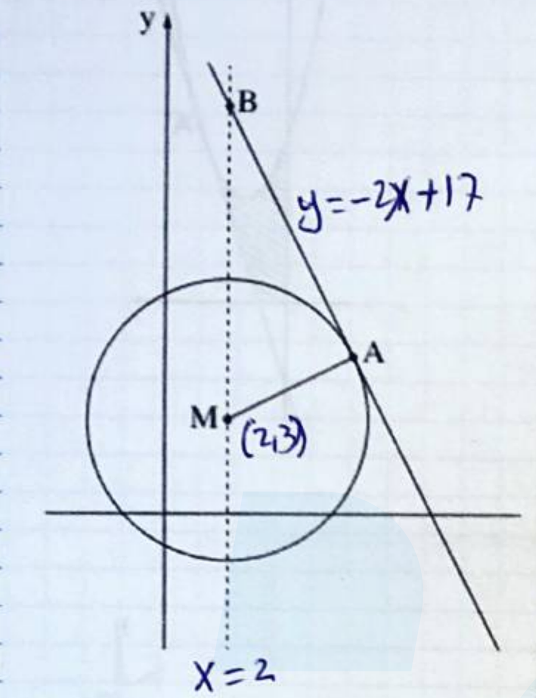
بحسب المعطيات:

AB مماس للدائرة في الدائرة

في النقطة A (أي أن A نقطة التماس)

معادلة المماس

$$y=-2x+17$$



إحداثيات مركز الدائرة M هي

$M(2,3)$

المستقيم $x=2$ يقطع المماس في B

اذاً احداثيات $B(2,y_B)$

أ- النقطة A هي نقطة التماس ولذلك نصف القطر MA

عمودي على المماس وبالتالي $\text{ميل } MA = \dfrac{-1}{\text{ميل } AB}$

$\text{ميل } MA = \dfrac{-1}{-2} \Longrightarrow \boxed{\text{ميل } MA = \frac{1}{2}}$

نجد معادلة نصف القطر MA // ميل MA هو $\frac{1}{2}$ ويمر ب $M(2,3)$

$$y=mx+n$$

$$3=\frac{1}{2}\cdot 2+n \Longrightarrow 3=1+n \Longrightarrow 3-1=n$$

$$\Longrightarrow \boxed{n=2}$$

إذاً معادلة نصف القطر هي $MA:\ y=\frac{1}{2}x+2$

A هي تقاطع AB مع MA:-

$MA:\ y=\frac{1}{2}x+2$

$AB:\ y=-2x+17$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}x+2=-2x+17$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}x+2x=17-2 \Longrightarrow 2.5x=15$$

$$\longrightarrow x=\frac{15}{2.5} \longrightarrow \boxed{x=6}$$

نجد: نعوض في AB:- $y=-2x+17$ $\boxed{x=6}$

$$y=-2\cdot 6+17=-12+17=5$$

$$\boxed{A:(6,5)}$$

ب. معادلة الدائرة من الصورة

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$

نعوض احداثيات النقطة A التي تقع على الدائرة وتحقق معادلة الدائرة والنقطة M مركز الدائرة ونجد R^2

$$(\underbrace{6-2}_{x_A-x_m})^2+(\underbrace{5-3}_{y_A-y_m})^2=R^2$$

$$4^2+2^2=R^2 \Longrightarrow 16+4=R^2 \Longrightarrow \boxed{20=R^2}$$

وبالتالي معادلة الدائرة هي:

$$\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=20}$$

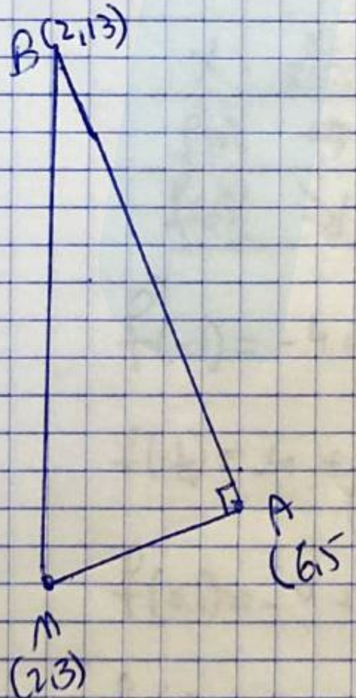
ج. بحسب المعطيات $x=2$ يقطع المماس في B

ولذلك $B(2,y_B)$ وبما ان B تقع على المماس

لذلك نعوض $x=2$ في معادلة المماس ونجد B

$$y=-2x+17 \xrightarrow[x=2]{} y=\underbrace{-2\cdot 2}_{-4}+17=13$$

$$\boxed{B(2,13)}$$



د. المثلث MAB قائم الزاوية $\measuredangle A=90$

ولذلك مساحته هي $\frac{MA\cdot AB}{2}$

$MA=R$ وبما ان $R^2=20$ اذاً $MA=\sqrt{20}$

$BM=13-3 \leftarrow \boxed{BM=10}$

وبحسب فيثاغورس

$$BM^2=MA^2+AB^2$$

$$10^2=(\sqrt{20})^2+AB^2 \rightarrow 100=20+AB^2 \rightarrow 80=AB^2$$

$$\boxed{\sqrt{80}=AB}$$

اذاً مساحة المثلث $MAB=\frac{MA\cdot AB}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}}{2}=\frac{40}{2}=\boxed{20}$

حل سؤال 4

$$f(x) = -4x - \frac{1}{x} + 3$$

أ- مجال تعريف الدالة $\boxed{x \neq 0}$

ب- خط التقارب المعامد للمحور x هو $\boxed{x=0}$

ج- النقاط القصوى تحقق $f'(x)=0$

$$f'(x) = -4 - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -4 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -4 + \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = 0$$

$$-4 + \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Longrightarrow 1 = 4x^2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4} = x^2 \Longrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = x \quad x_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -0.5$$

نفحص النقاط بواسطة جدول :

x	$x<0.5$ $\boxed{x=-1}$	-0.5	$-0.5<x<0$ $x=-0.1$	0	$0<x<\frac{1}{2}$ $x=0.1$	0.5	$x>0.5$ $\boxed{x=1}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	‖‖	↗	max	↘

$$f'(-1) = -4 + \frac{1}{(-1)^2} = -4 + 1 = -3 < 0 \searrow$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -4 + \frac{1}{(0.1)^2} = -4 + 100 = 96+ > 0 \nearrow$$

$$f(0.1) = -4 + \frac{1}{(0.1)^2} = + \nearrow$$

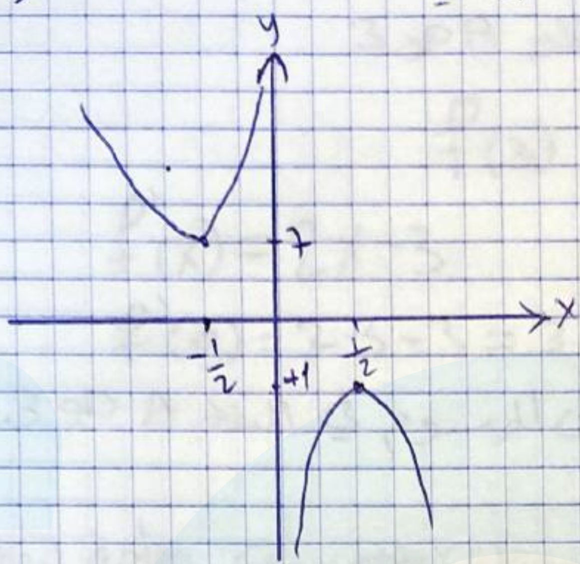
$$f(1) = -4 + \frac{1}{1} = -3 < 0 \searrow$$

نجد احداثيات النقاط القصوى

$$f(-0.5) = -4(-0.5) + \frac{1}{-0.5} + 3 = 7 \qquad \left(-\frac{1}{2}, 7\right) \text{ min}$$

$$f(0.5) = -4(0.5) + \frac{1}{0.5} + 3 = -1 \qquad (0.5, -1) \text{ max}$$

(د) حسب نتائج البند السابق فإن النقطة $(-\frac{1}{2}, 7)$ هي מינימום
والدالة غير معرفة في $x=0$ والنقطة $(0.5, -1)$ هي מקסימום
وبالتالي الرسم البياني للدالة $f(x)$ سيكون كالتالي



وبحسب الرسم نلاحظ انه لا يوجد تقاطع مع المحور x.

طريقة أخرى للحل

في نقاط التقاطع مع المحور x يكون $y=0$ // $f(x)=0$

اي يتحقق $0=4x-\frac{1}{x}+3$

نضرب المعادلة بـ x ونحصل على:

$$0=-4x^2-1+3x \Longrightarrow -4x^2+3x-1=0$$

$$a=-4 \quad b=3 \quad c=-1$$

نحل المعادلة حسب الدستور

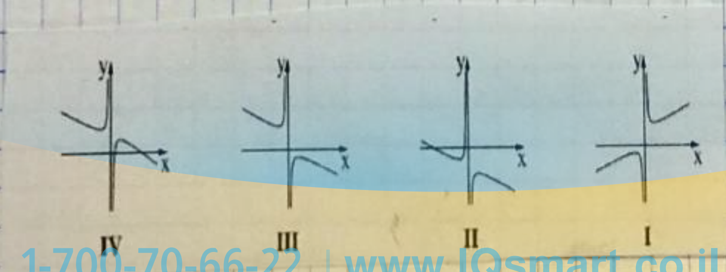
$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{3^2-4(-4)(-1)}}{2\cdot(-4)}=\frac{-3\mp\sqrt{9-16}}{-8}=\frac{-3\mp\sqrt{-7}}{2}$$

العدد تحت الجذر سالب اي لا يوجد حل

وهذا معناه ان الرسم لا يقطع x

(ه) - بحسب الشرح في البند السابق الرسم الملائم هو رسم III

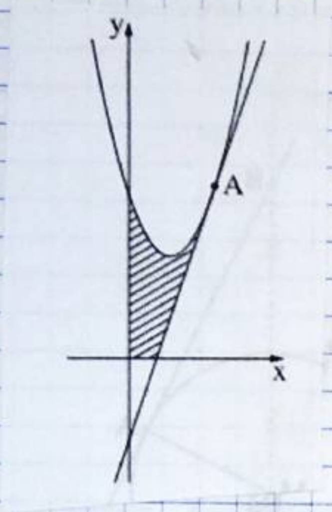


حل سؤال 5:

1.f) $f(x)=x^2-3x+6$

A هي نقطة التماس التي يمس فيها المماس الدالة

الإحداثي x للنقطة A هو 3



ميل المماس = $f'(3)$

$$f'(x)=2x-3$$

$$f'(3)=2\cdot3-3=3$$

اذاً ميل المماس المرسوم في النقطة A هو 3.

2.f) لكي نجد معادلة المماس نحن بحاجة لنقطة على الدالة والمماس وميل المماس.

النقطة A تقع على المماس والدالة ولذلك تحقق معادلة المماس وتحقق الدالة. نعوض $x=3$ بالدالة ونجد y_A

$$f(3)=3^2-3\cdot3+6=9-9+6=6$$

اذاً $A(3,6)$

معادلة المماس من الصورة $y=mx+n$

$A(3,6)$ $m=3$

$$6=3\cdot3+n \longrightarrow 6=9+n \longrightarrow 6-9=n \rightarrow \boxed{-3=n}$$

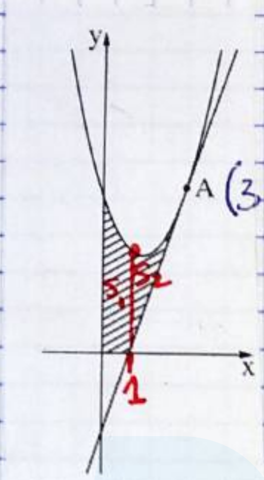
$\boxed{y=3x-3}$ معادلة المماس

3.f) نقطة تقاطع المماس مع المحور x هي:

$$0=3x-3 \Longrightarrow 3=3x \Longrightarrow \frac{3}{3}=x \Longrightarrow \boxed{1=x}$$

نقطة التقاطع مع x هي $\boxed{(1,0)}$

هـ- المساحة للمخطط عبارة عن مساحتين
المساحة الاولى S_1 هي المساحة
بين الدالة والمحور y والمحور x أي هي:



$$S_1=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2-3x+6\,dx$$

المساحة الثانية هي S_2:
وهي عبارة عن المساحة المحصورة بين
الدالة والمماس بين $x=1$ و $x=3$
أي

$$S_2=\int_1^3 f(x)-(\text{المماس})\,dx$$

$$S_2=\int_1^3 x^2-3x+6-(3x-3)\,dx$$

نحسب S_1:

$$S_1=\int_0^1 x^2-3x+6\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^1$$

$$S_1=\left[\frac{1^3}{3}-\frac{3\cdot1^3}{2}+6\cdot1\right]-[0]=4\frac{5}{6}\Rightarrow\boxed{S_1=4\frac{5}{6}}$$

نحسب S_2:

$$S_2=\int_1^3 x^2-3x+6-3x+3\,dx$$

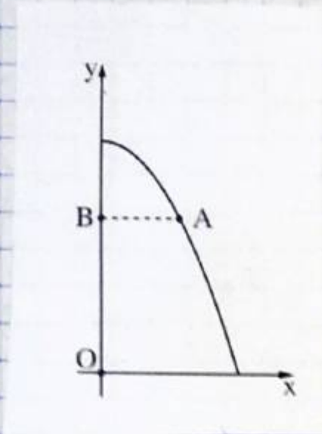
$$S_2=\int_1^3 x^2-6x+9\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+9x\right]_1^3=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{3^3}{3}-3\cdot3^2+9\cdot3\right]-\left[\frac{1^3}{3}-3\cdot1^2+9\cdot1\right]=9-6\tfrac{1}{3}=2\tfrac{2}{3}$$

المساحة المخططة $=S_1+S_2=4\frac{5}{6}+2\frac{2}{3}=7\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{المساحة المخططة}=7\frac{1}{2}}$

حل سؤال 6



$$y=-\frac{1}{2}x^2+6$$

بما أن AB يوازي المحور X

لذلك للنقاط A و B نفس الاحداثي y

$A(x_A,y_A)$ $\quad y_A=-\frac{1}{2}x_A^2+6$

إذاً: $A\left(x_A,-\frac{1}{2}x_A^2+6\right)$, $B:\left(0,-\frac{1}{2}x_A^2+6\right)$

$AB=x_A-0=x_A$

$OB=-\frac{1}{2}x_A^2+6$ (الاحداثي y للنقطة B)

$f(x)=AB\cdot BO \Longrightarrow f(x)=x_A\cdot\left(-\frac{1}{2}x_A^2+6\right)$

$f(x)=-\frac{1}{2}x_A^3+6x_A$

$f'(x)=-\frac{1}{2}3x_A^2+6=-\frac{3}{2}x_A^2+6 \Longrightarrow f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6$

$f'(x)=-\frac{3}{2}x_A^2+6=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x_A^2=-6 \Rightarrow -3x_A^2=-12$

$\Longrightarrow x_A^2=\frac{-12}{-3} \Longrightarrow \boxed{x_A^2=4} \Longrightarrow \boxed{x_A=\pm\sqrt{4}}$ → $\boxed{x_A=2}$, $\boxed{x_A=-2}$

بما ان النقطة A تقع بالربع الاولى اذاً $\boxed{x_A=2}$.

نفحص النقطة حسب جدول

x	0	$0<x<2$ $x=1$	2	$x=3$ $x>2$
f'		+	0	+
f	6	↗	max	↘

$f(0)=6$

$f'(1)=-\frac{3}{2}\cdot(1)^2+6=+<0$ ↑

$f'(3)=-\frac{3}{2}\cdot(3)^2+6<0$ ↓

$f(2)=-\frac{1}{2}2^3+6\cdot2=-4+12=\boxed{8}$