حل نموذج بجروت

(806) 581

موعد مُتعدرين

2021

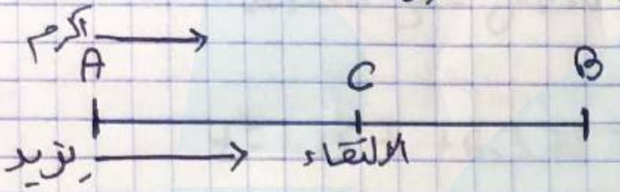
طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

من معطيات السؤال نفهم النقاط التالية

* يزيد وأكرم سارا بنفس الطريق من المدينة A إلى B
* قطع يزيد المسافة بين A و B خلال 3 ساعات
* أكرم خرج بعد يزيد بفترة معينة والتقيا بعد $1\frac{1}{2}$ ساعة من خروج أكرم
* أكرم وصل الى B ربع ساعة قبل وصول يزيد



نفرض أن أكرم خرج بعد يزيد بـ t ساعات.

لذلك حتى الالتقاء:

أكرم سار $1\frac{1}{2}$ ساعة ويزيد سار $(1\frac{1}{2}+t)$ ساعات

نفرض سرعة أكرم V_2 وسرعة يزيد V_1

اذاً حتى الالتقاء:

	س	زمن	مسافة
يزيد	V_1	$1.5+t$	$V_1(1.5+t)$
أكرم	V_2	1.5	$1.5V_2$

$$\Rightarrow \boxed{V_1(1.5+t)=1.5V_2} \quad \text{I}$$

حتى الوصول الى B يتحقق:

يزيد قطع المسافة خلال 3 ساعات

أكرم وصل $\frac{1}{4}$ ساعة قبل يزيد

لذلك زمن أكرم هو $3-t-\frac{1}{4} \rightarrow 2.75-t$

	سرعة	زمن	مسافة
أكرم	V_2	$2.75-t$	$V_2(2.75-t)$
يزيد	V_1	3	$3V_1$

ويتحقق: $\boxed{3V_1=V_2(2.75-t)} \quad \text{II}$

اذاً حصلنا على معادلتين بمتغيرين

$$\text{I} \quad V_1(1.5+t) = 1.5V_2 \Longrightarrow \boxed{\frac{1.5+t}{1.5} = \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\text{II} \quad 3V_1 = V_2(2.75-t) \Longrightarrow \boxed{\frac{3}{2.75-t} = \frac{V_2}{V_1}}$$

اي يتحقق :- $\dfrac{3}{2.75-t} = \dfrac{1.5+t}{1.5}$

$$\Longrightarrow 4.5 = (1.5+t)(2.75-t)$$

نفك الاقواس ونبسط نحصل على المعادلة التربيعية التالية :-

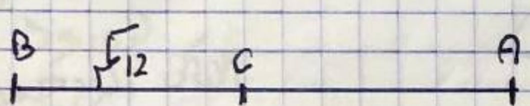
$$t^2 - 1.25t + 0.375 = 0$$

نحل المعادلة حسب الدستور ونحصل على :-

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad // \quad t_2 = \frac{3}{4}$$

ب- بحسب المعطيات التقى يزيد واكرم على بعد 12 كم من B.
وسرعة اكرم اكبر من 20كم/س.

بما انه هنالك امكانيتين لزمن خروج اكرم بعد يزيد لذلك علينا ان نفحص اي امكانيه ل t ملائمة لسرعة اكرم 20كم/س لاكرم .



نفحص اولاً بالنسبه ل $t=0.75$

أكرم قطع المسافه من A الى C خلال 1.5 ساعة ومن A الى B خلال $2.75-t$ (من الجداول) اي $2.75-0.75 \leftarrow 2$ ساعة

اي ان المسافه من C الى B قطعها خلال : $2-1.5=0.5$

اذاً بالنسبه لأكرم يتحقق $(C \rightarrow B)$ $12 = \frac{1}{2}V_2 \leftarrow V_2 = 24$ كم/س

وهذا يلائم معطيات السؤال $\boxed{\text{اذاً سرعة اكرم 24 كم/س}}$

وبالنسبة ليزيد يتحقق : $(C \leftarrow B)$ زمن السير $= 3-(1.5+\overset{0.75}{t}) \leftarrow 0.75$

ويتحقق $12 = 0.75 \cdot V_1 \leftarrow \boxed{16 = V_1}$ اذاً سرعة يزيد 16 كم/س

حل سؤال 2

بحسب المعطيات:-

المتوالية a_1, a_2, a_3 ---- هندسية لانهائية تنازلية

اي $-1 < q < 1$

ومجموع حدود المتوالية بدون الحد الاول هو 4.

في المتوالية الجديدة بدون الحد الاول يكون a_2 هو اول حد بالمتوالية وبالتالي مجموع حدودها يحقق:-

$$S_n \text{ (بدون } a_1) = \frac{a_2}{1-q} = \boxed{\frac{a_1 \cdot q}{1-q} = 4} \quad \mathrm{I}$$

في المتوالية الثانية (معطى انها هندسية)

$a_1, -a_2, a_3, -a_4 \dots$

أساس المتوالية هو $\frac{-a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{-a_1 q}{a_1} \Rightarrow \boxed{-q}$

ومجموعها يحقق (بدون الحد الأول)

$$S_n = \frac{-a_1 \cdot q}{1-(-q)} \Rightarrow \boxed{\frac{-a_1 \cdot q}{1+q} = -2.4} \quad \mathrm{II}$$

بعد تبديل الاشارات للحدود بالاماكن الزوجية

إذاً حصلنا على معادلتين بمتغيرين

نقسم المعادلتين نحصل على:-

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} = \frac{\frac{\cancel{a_1 q}}{1-q}}{\frac{-\cancel{a_1 q}}{1+q}} = \frac{4}{-2.4} \Rightarrow \frac{-1(1+q)}{1-q} = \frac{4}{-2.4}$$

$$\Rightarrow 2.4(1+q) = 4(1-q) \Rightarrow 2.4 + 2.4q = 4 - 4q \dots \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{4}}$$

نجد a_1

$$\Rightarrow \frac{a_1 \cdot q}{1-q} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} a_1}{1-\frac{1}{4}} = 4 \Rightarrow \dots \boxed{a_1 = 12}$$

ب) المتوالية الجديدة C_n تحقق:

$\frac{a_2}{a_1^2}, \frac{a_3}{a_2^2}$ ----

نبرهن ان $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ هو مقدار ثابت:-

$$C_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \Rightarrow \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2} \cdot \frac{a_n^2}{a_{n+1}}$$

$$C_n = \frac{a_{n+1}}{a_n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a_{n+2}}^{q}}{\cancel{a_{n+1}}} \cdot \frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2_{q^2}} = \frac{q}{q^2} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

اذا اساس المتوالية C_n هو $\boxed{Q_c = \frac{1}{q} = 4}$

نجد الحد الأول:-

$$C_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{\frac{1}{12 \cdot 4}}{(12)^2} = \frac{1}{12 \cdot 4} = \frac{1}{48} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{48}}$$

ج) بحسب معطيات السؤال يتحقق

$$S_{C_{K+1} \cdots C_{3K}} = 4096 \cdot S_{2K}$$

مجموع الحدود من $C_{K+1} \cdots C_{3K}$ عبارة عن مجموع $2K$ حدود من المتواليه الهندسيه C_n بحيث اول حد هو C_{K+1}
(اشبه من C_{K+1} حتى C_{3K} يوجد $2K$ حدود)
(* عدد الحدود = مكان الحد الاخير − مكان الحد الاول + 1)

$$S_{2K \text{ الاولى}} = \frac{C_1 \cdot (Q_c^{2K} - 1)}{Q - 1} = \frac{1}{48} \cdot \frac{(4^{2K} - 1)}{4 - 1} = \frac{4^{2K} - 1}{3 \cdot 48}$$

المجموع $C_{K+1} \cdots C_{3K}$ يحقق: $S_{C_{K+1} \cdots 3K} = C_{K+1} \cdot \frac{(Q_c^{2K} - 1)}{Q - 1}$

$$S_{c_{k+1}-c_{3k}} = c_{k+1} \cdot \frac{4^{2k}-1}{4-1} = c_{k+1} \frac{4^{2k}-1}{3}$$

اذاً حصلنا على المجموعتين المتتاليتين لاول 2k عدد ول 2k عدد
بدءاً من c_{k+1} وحتى c_{3k} , وبحسب معطيات السؤال نتحقق

$$c_{k+1} \cdot \cancel{\frac{4^{2k}-1}{3}} = 4096 \cdot c_1 \cdot \cancel{\frac{4^{2k}-1}{3}}$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_1} = \frac{\cancel{c_1} \cdot 4^k}{\cancel{c_1}} = 4096$$

$$4^k = 4096 \longrightarrow 4^k = 4^6 \longrightarrow \boxed{k=6}$$

نكتب العدد 4096
للعدد اساسه 4 مرفوع لقوة 6

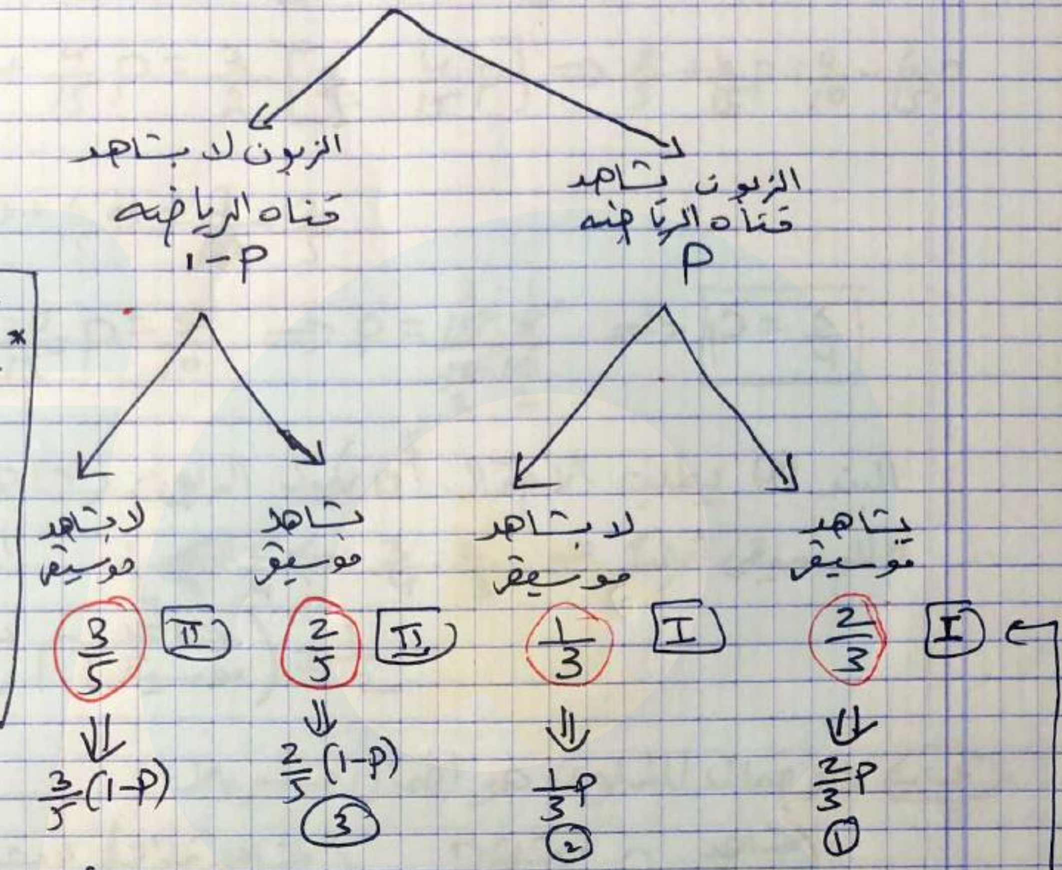
اذاً : $\boxed{k=6}$

حل سؤال 3

نبني شجرة تعبر عن معطيات السؤال

نفرض ان P هي الاحتمال أن زبون الشركة يشاهد قناة رياضة

وبالتالي الاحتمال ان لا يشاهد قناة الرياضة هو $1-P$



* كل واحد من الذين يشاهدون قناة الرياضة او الذين لا يشاهدون قناة الرياضة ممكن ان يشاهد قناة الموسيقى أو لا يشاهد قناة الموسيقى

I حسب المعطى $\frac{2}{3}$ الذين يشاهدون قناة الرياضة يشاهدون قناة الموسيقى وبالتالي الذين يشاهدون قناة الرياضة ولا يشاهدون الموسيقى هم $\frac{1}{3}$

II حسب المعطيات 40% $\left(\frac{2}{5}\right)$ من الذين لا يشاهدون قناة الرياضة يشاهدون قنوات الموسيقى أيضاً والباقي $\frac{3}{5}$ هم الباقون أي الذين لا يشاهدون قناة الرياضة ولا يشاهدون الموسيقى.

حسب المعطيات عدد زبائن الشركة الذين يشاهدون قنوات الموسيقى (اي التفرعات ① و③) يشكل 1.5 مرة الذين لا يشاهدون (اي التفرعات ② و④) وبالتالي يتحقق:

الذين يشاهدون قنوات موسيقى | الذين لا يشاهدون قنوات موسيقى

$$\frac{2}{3}p + \frac{2}{5}(1-p) = 1.5\cdot\left[\frac{1}{3}p + \frac{3}{5}(1-p)\right]$$

$$\frac{2}{3}p + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}p = 1.5\left[\frac{1}{3}p + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}p\right]$$

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{15}p = \frac{3}{2}\left[\frac{3}{5} - \frac{4}{15}p\right] \Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{4}{15}p = \frac{9}{10} - \frac{6}{15}p$$

$$\frac{4}{15}p + \frac{6}{15}p = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{10}{15}p = \frac{5}{10} \Rightarrow p = \frac{\cancel{15}\cdot\cancel{5}}{\cancel{10}\cdot\cancel{10}} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{3}{4}}$$

البند (أ) يطلب الاحتمال أن يكون الزبون يشاهد قنوات الرياضة والموسيقى أيضاً هو $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$

$$P\left(\text{يشاهد رياضة} \cap \text{يشاهد موسيقى}\right) = \frac{1}{2}$$

ب- الاحتمال المطلوب هو احتمال مشروط

$$P\left(\text{لا يشاهد قنوات موسيقى} \mid \text{يشاهد قنوات موسيقى او رياضة}\right) = \frac{P\left(\text{لا يشاهد موسيقى} \cap \text{يشاهد موسيقى او رياضة}\right)}{P\left(\text{يشاهد موسيقى او رياضة}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}{1 - P\left(\text{لا يشاهد موسيقى ولا يشاهد رياضة}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{20}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{17}{20}} = \boxed{\frac{5}{17}}$$

* ملاحظة من الممكن بناء جدول ثنائي الابعاد يعتمد على نتائج الشجرة كما يلي. وبحسب الجدول نستنتج الاحتمالات المطلوبة .....

	يشاهد رياضة	لا يشاهد رياضة	
يشاهد موسيقى	0.5	0.1	0.6
لا يشاهد موسيقى	0.25	0.15	0.4
	0.75	0.25	1

جـ- بحسب المعطيات تم اختيار 4 شبان لا يشاهدون القنوات الرياضية ويطلب منا الاحتمال ان يكون 2 على الاقل من بينهم يشاهدون قنوات الموسيقى:

الاحتمال أن نختار شخص يشاهد الموسيقى من بين أولئك الذين لا يشاهدون الرياضية اي

$$P\left(\text{يشاهد موسيقى} \,/\, \text{لا يشاهد رياضة}\right) = \frac{P\left(\text{يشاهد موسيقى} \cap \text{لا يشاهد الرياضة}\right)}{P\left(\text{لا يشاهد الرياضة}\right)}$$

وبحسب الجدول نتحقق:

$$P\left(\text{يشاهد موسيقى} \,/\, \text{لا يشاهد رياضة}\right) = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = \frac{2}{5}$$

وبالتالي $P\left(\text{لا يشاهد موسيقى} \,/\, \text{لا يشاهد رياضة}\right) = 0.6$

الاحتمال ان يكون اثنين على الاقل من بين الاربعة الذين اختيروا يشاهدون موسيقى ولا يشاهدون رياضة هو

$$P\left(\text{على الاقل اثنين}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$= \frac{328}{625} = 0.5248$$

حـ. حسب المعطيات اختاروا 4 زبائن نسأل عن الاحتمال ان يكون على الاقل 2 منهم يشاهدون قنوات الموسيقى إذا علمنا انهم لا يشاهدون القنوات الرياضية :-

من البنود السابقة:

$$P\left(\text{يشاهد موسيقى} \middle| \text{لا يشاهد رياضة}\right) = \frac{2}{5}$$

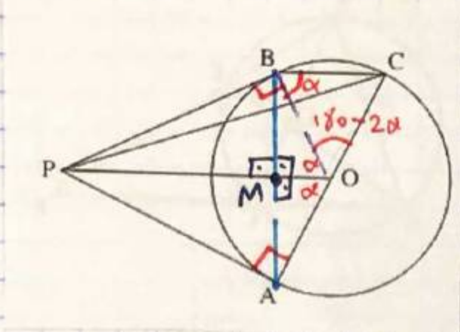
الاحتمال ان اثنين على الاقل من بين الاربعة الذين اختيروا هو :-

$$P\left(\begin{matrix}\text{على الاقل} \\ \text{اثنين من بين} \\ \text{الذين اختيروا} \\ \text{يشاهدون} \\ \text{موسيقى}\end{matrix}\right) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$= 12\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{9}{25}\right) + 4\left(\frac{8}{125}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{16}{625}$$

$$= \frac{328}{625} = 0.5248$$

حل سؤال 4



أ- نرسم نصف القطر BO والوتر AB

الشكل الناتج BPAO هو دالتون

لأن PB=PA طول المماسين المرسومين

من نقطة خارج دائرة حتى نقاط التماس

متساويين و OB=OA انصاف اقطار

في الدالتون الاقطار متعامدة والقطر الرئيسي PO ينصف الجانبي AB.

القطر PO ينصف الزاوية التي يصل بينها أي يتحقق

$\angle BPO=\angle APO$ وأيضاً $\angle BOP=\angle POA$

(1) نفرض $\angle BOP=\alpha \Leftarrow \angle POA=\alpha$

(2) وبالتالي $\angle BOC=180-2\alpha$ $\angle AOB$ مستقيمة

(3) $\angle OBC=\angle OCB$ ويتحقق $\angle OBC=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$ زوايا قاعدة في مثلث متساوي الساقين

(4) $\angle BOP=\angle OBC=\alpha$ وهي زوايا متبادلة بالنسبة لـ PO و BC

لذلك $PO \parallel BC$

وهو المطلوب (أ)

(ب) معطى أن $K=\frac{PO}{BC} \Leftarrow \frac{S_{PBC}}{S_{OPC}}=?$

سنحل السؤال بطريقتين!

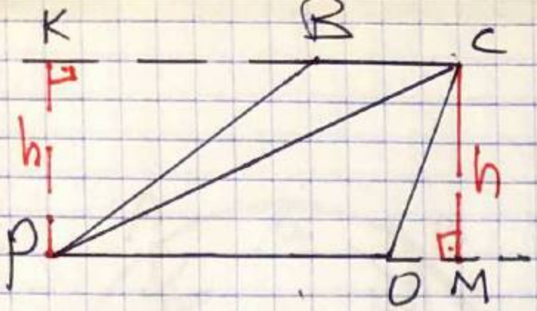
طريقة (أ):

$$S_{PBC}=\frac{PC\cdot BC\cdot \sin\angle BCP}{2}$$

$\Rightarrow \angle BCP=\angle CPO=\beta$ متبادلة بين متوازيين

$$S_{OPC}=\frac{PO\cdot PC\cdot \sin\angle CPO}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{PBC}}{S_{OPC}}=\frac{\frac{\cancel{PC}\cdot BC\cdot \cancel{\sin\beta}}{\cancel{2}}}{\frac{PO\cdot \cancel{PC}\cdot \cancel{\sin\beta}}{\cancel{2}}}=\frac{BC}{PO}=\boxed{\frac{1}{K}}$$

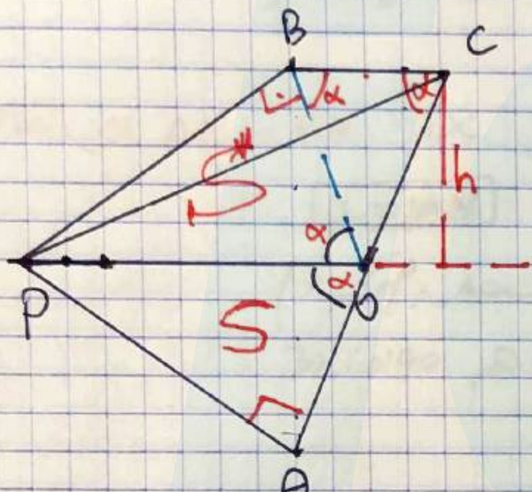


طريقة (ب)

ارتفاع المثلث PCO النازل
على الضلع PO هو $h=CM$
وارتفاع المثلث PBC النازل على
الضلع BC هو $PK=h$

اذن:

$$\frac{S_{PBC}}{S_{POC}} = \frac{\frac{BC\cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}}{\frac{PO\cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}} = \frac{BC}{PO} = \boxed{\frac{1}{k}}$$



(P)

$$S_{\Delta PAO} = S_{\Delta POB} = S'$$

لأن $\Delta POB \cong \Delta PAO$ من البند (أ)

$$S_{\Delta POB} = \frac{PO\cdot h}{2} = S'$$

نفرض: $S_{\Delta BOC} = \frac{BC\cdot h}{2} = X$

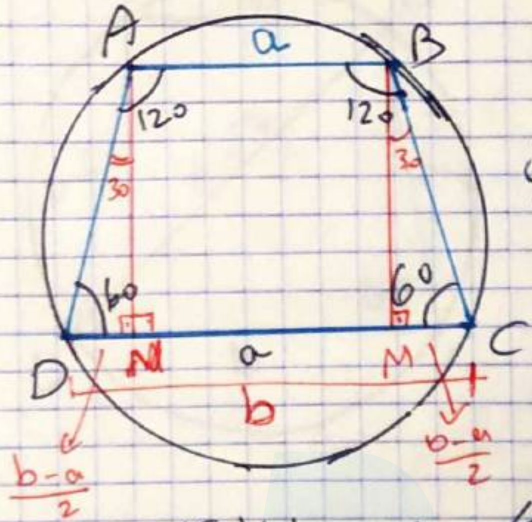
$$\frac{S_{\Delta POB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{\frac{PO\cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}}{\frac{BC\cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}} = \frac{S'}{X}$$

$$\underbrace{\frac{PO}{BC}}_{k} = \frac{S'}{X} \Rightarrow X = \frac{S}{k}$$

$$S_{\square PACB} = S_{\Delta PAO} + S_{\Delta POB} + S_{\Delta BOC} = S+S+\frac{S}{k}$$

$$= 2S + \frac{S}{k} = \boxed{\frac{2k\cdot S + S}{k}}$$

حل سؤال 5



أ) * شبه المنحرف المحصور داخل دائرة هو شبه منحرف متساوي الساقين (هذه النظرية ليست ضمن النظريات التي يمكن صياغتها دون برهانها اي انه في امتحان البجروت يجب اثباتها لكي تعتمد عليها)

* شبه المنحرف المتساوي الساقين تكون فيه زوايا القاعدة متساوية و $\measuredangle A = 120 \parallel \measuredangle B = 120$

ننزل من B ومن A عموديين على DC BM و AN على التناظر

MNAB هو مستطيل ولذلك $\boxed{a=MN}$.

$\triangle AND \cong \triangle BMC$ (ص ز ز، ...)

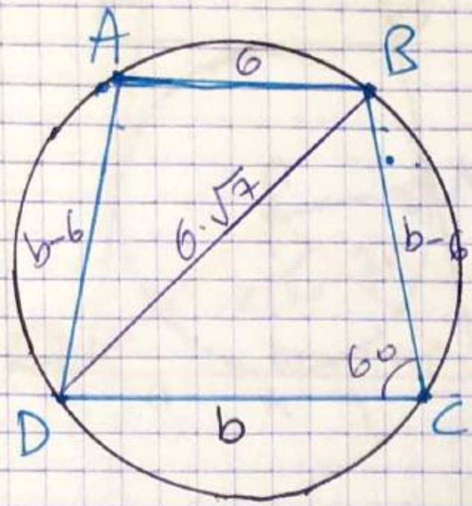
وينتج لدينا مثلثين ذهبيين زواياهم 30:60:90

ويتحقق ان $DN = MC = \frac{b-a}{2}$

بحسب النظرية: في المثلث القائم الزاوية الذي زواياه 30:60:90 طول الوتر هو ضعف طول القائم المقابل للزاوية 30 لذلك نتحقق أن

$$BC = 2 \cdot MC = 2 \cdot \frac{b-a}{2}$$

$$\boxed{BC = b - a = AD}$$



ب

بحسب نظرية ال cos يتحقق

$$BD^2 = b^2 + (b-6)^2 - 2b(b-6)\cdot\underbrace{\cos 60}_{0.5}$$

$$(6\cdot\sqrt{7})^2 = b^2 + \cancel{b^2} - 12b + 36 - \cancel{b^2} + 6b$$

$$252 = b^2 - 6b + 36$$

$$\Rightarrow b^2 - 6b - 216 = 0$$

$\boxed{b_1 = 18}$ $\qquad$ $b_2 = -12$ X غير ملائم

ج.1 المثلث BCD محصور داخل الدائرة التي تحصر شبه المنحرف ولذلك بحسب قانون ال sin يتحقق:-

$$\frac{BD}{\sin 60} = \frac{6\cdot\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \longrightarrow \frac{12\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 2R \rightarrow \boxed{\frac{6\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = R}$$

$$\Rightarrow \boxed{2\cdot\sqrt{21} = R}$$

ج.2 الشرط لحصر شكل رباعي داخل دائرة (بهذه الحالة اضلاع الشكل الرباعي هي مماسات) هو ان يكون مجموع اطول كل ضلعين متقابلين متساوي، اي أن يتحقق:

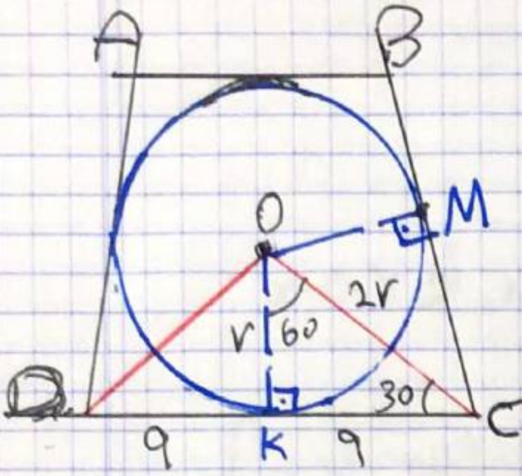
$$AD + BC = AB + DC$$

$(b-6)\ (b-6) = 6 + 18$ $\qquad$ في شبه المنحرف المعطى

$$12 + 12$$

$$24 = 24$$

ولذلك يمكننا ان نحصر داخل شبه المنحرف دائرة.



ج 3) لتكن O مركز الدائرة المحصورة داخل شبه منحرف

نرسم OC و OD و OM و OK

K, M هي نقاط التماس

بما ان المماس عمودي على نصف القطر لذلك $\sphericalangle K = \sphericalangle M = 90^\circ$

المثلث $\Delta OCM \cong \Delta OCK$ (حسب ض، ز، ض)

$OM = OK$ انصاف اقطار

OC مشترك

$CK = CM$ المماسين المرسوم من نقطة خارج دائرة والى نقطة التماس متساوين

من هنا نستنتج ان OC منصف $\sphericalangle BCD$

وبنفس الاسلوب نستنتج ان OD هو منصف زاوية ايضا

لذلك نستنتج أن:

ΔODC متساوي الساقين $OD = OC$

($\Delta OKD \cong \Delta OKC$ انتبه)

OK ارتفاع في المثلث المتساوي الساقين وبالتالي ينصف القاعدة

إذن: $CK = DK = 9$

المثلث OKC مثلث زهري ولذلك $2OK = OC$

إذن $OK = r \Leftarrow OC = 2r$

ويتحقق: $OC^2 = OK^2 + KC^2$

$\hookrightarrow (2r)^2 = r^2 + 9^2$

$4r^2 = r^2 + 81 \rightarrow 3r^2 = 81 \rightarrow r^2 = 27 \rightarrow r = \sqrt{27}$

إذن نصف قطر الدائرة المحصورة: $\boxed{r = \sqrt{27}}$

حل سؤال 6

$$f(x)=\frac{a\cdot x}{\sqrt{x^2-16}}$$

أ. مجال التعريف $x^2-16>0 \Leftarrow x>4$ أو $x<-4$

ب. خطوط التقارب: $(a>0)$

العموديه: $x=4$ او $x=-4$ (لا يتحقق $\frac{0}{0}$)

الافقيه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a\cancel{x}}{\cancel{|x|}\cdot\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}}\longrightarrow a \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=a \\ x\to+\infty \end{matrix}}$$

نفس الاسلوب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a\cancel{x}^{\,-1}}{\cancel{|x|}\sqrt{1-\frac{16}{x^2}}}\longrightarrow -a \quad \boxed{\begin{matrix} y=-a \\ x\to-\infty \end{matrix}}$$

ج.

$$f'(x)=\frac{a\cdot 1\cdot\sqrt{x^2-16}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-16}}\cdot ax}{\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2-16)-ax^2}{\sqrt{x^2-16}\,(x^2-16)}=\frac{-16a}{\sqrt{x^2-16}\,(x^2-16)}$$

$-16a$ سالب لان a موجب و المقام دائماً موجب في مجال تعريف الدالة , لذلك $f'(x)<0$ لكل x في مجال تعريف الدالة

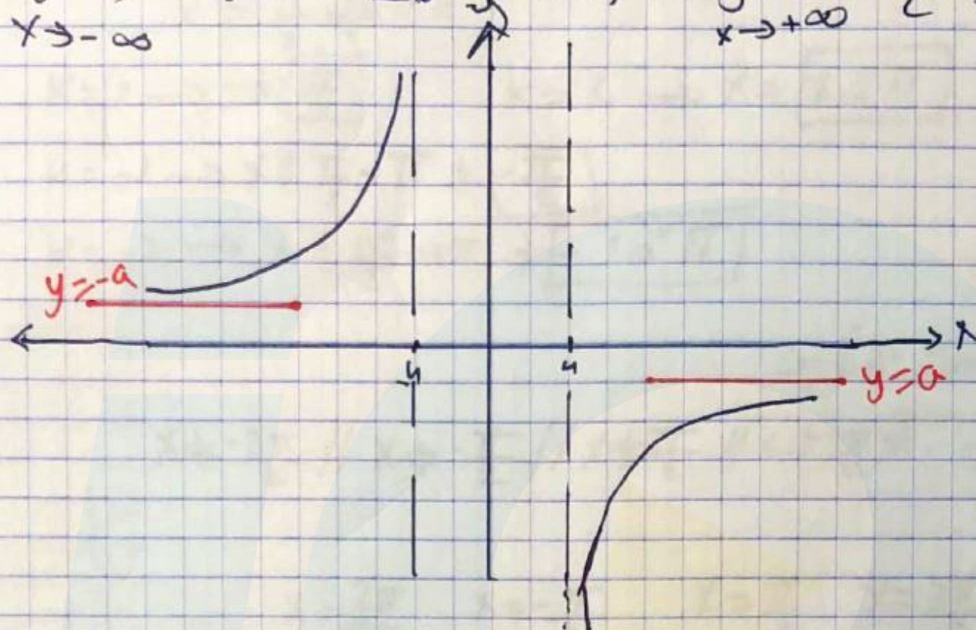
اي ان الدالة تنازلية لكل x في مجال التعريف.

د.

هـ) إذا كان $a<0$ فإنَّ $f'(x) = \frac{-16a}{(x^2-16)\cdot\sqrt{x^2-16}}$

البسط موجب سيصبح والمقام موجب والدالة تصاعدية على طول المجال

وسيصبح $\underset{x\to+\infty}{y=a}$ خط تقارب بميل سالب و $\underset{x\to-\infty}{y=-a}$ بميل a سالب



و) $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ ، الدالة g معرفة بنفس مجال f.
وكذلك f' معرفة بنفس المجال. // $a=1$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$ $\quad$ $f'(x)=\frac{-16}{(x^2-16)\cdot\sqrt{x^2-16}}$

f' سالبة لكل x حسب الشرح السابق

حسب الرسم لـ f الملائم لـ a موجب (الرسم من البند د)

فإنّ f موجبة لكل $x>4$ وبالتالي:

$g(x)=f(x)\cdot f'(x)$

ستكون سالبة في المجال $\boxed{x>4}$ $(\overset{f}{+}\cdot\overset{f'}{-})$

ز) في المجال $5\le x\le 6$ g سالبة $S_{\text{المساحة}} = \left|\int_5^6 g(x)\,dx\right| = \left|\int_5^6 f'\cdot f\,dx\right| = \left|\left[\frac{f^2}{2}\right]_5^6\right|$

$f^2(x)=\frac{x^2}{x^2-16}$ $\quad$ $f^2(6)=\frac{9}{5}$ $\quad$ $f^2(5)=\frac{25}{9}$ $\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\frac{9}{5}-\frac{25}{9}\right|=\frac{22}{45}$

حل سؤال 7:

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$

1) أ مجال التعريف $\cos^2 x \neq 0 \leftarrow \cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k=0 \rightarrow x \neq \boxed{\frac{\pi}{2}} \qquad k=1 \rightarrow x = \boxed{1.5\pi}$

$k=-1 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} - \pi \neq \boxed{-\frac{\pi}{2}}$

$k=-2 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} - 2\pi \neq \boxed{-1.5\pi}$

اذاً مجال التعريف:

$-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ و $x \neq \frac{3\pi}{2} \,//\, x \neq \frac{\pi}{2} \,//\, x \neq -\frac{\pi}{2} \,//\, x \neq -\frac{3\pi}{2}$

2. أ $\quad x = \frac{3\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = -\frac{3\pi}{2}$

ب. $\cos(-x) = \cos x$

$f(-x) = \frac{1}{(\cos(-x))^2} - 4 = \frac{1}{(\cos(x))^2} - 4 = f(x)$

اذاً لكل x بمجال التعريف $f(-x) = f(x)$

وبالتالي $f(x)$ زوجية.

$f'(x) = \frac{0 - 2\cos x \cdot (-\sin x)}{(\cos^2 x)^2} = \frac{2\cos x \cdot \sin x}{(\cos x)^4} = \frac{\sin 2x}{(\cos x)^4}$

$f'(x) = \frac{\sin 2x}{(\cos x)^4} = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = \pi k$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} k$

$k=0 \rightarrow \boxed{x=0}$ ✓ $\quad k=1 \rightarrow \cancel{\boxed{x = \frac{\pi}{2}}} \quad k=2 \rightarrow \boxed{x=\pi}$ ✓

$k=-1 \rightarrow \cancel{\boxed{x = -\frac{\pi}{2}}}$ ✗ $\quad k=-2 \rightarrow \boxed{x = -\pi}$ ✓ $\quad k=3 \rightarrow \cancel{\boxed{x = \frac{3\pi}{2}}}$ ✗

اذا نقاط الشك هي جذور المقام $-\pi, 0, \pi$

نصنف النقاط بواسطة جدول

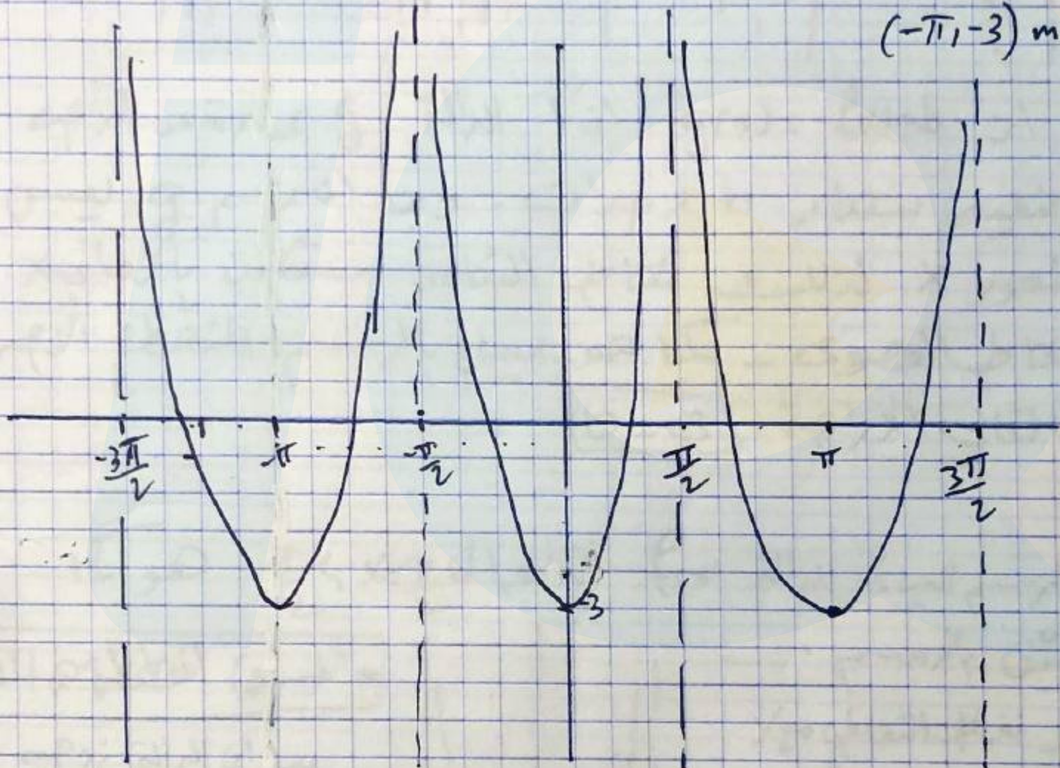
x	$-\frac{3\pi}{2}$	$<x<$	$-\pi$	$<x<$	$-\frac{\pi}{2}$	$<x<$	0	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$	$<x<$	π	$<x<$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$	//	$-$	0	$+$	//	$-$	0	$+$	//
$f(x)$	//	↘	min	↗	//	↘	min	↗	//	↘	min	↗	//

$f(\pi) = f(-\pi) = -3$ $\qquad f(0) = -3$

$(\pi, -3)$ min

$(0, -3)$ min

$(-\pi, -3)$ min

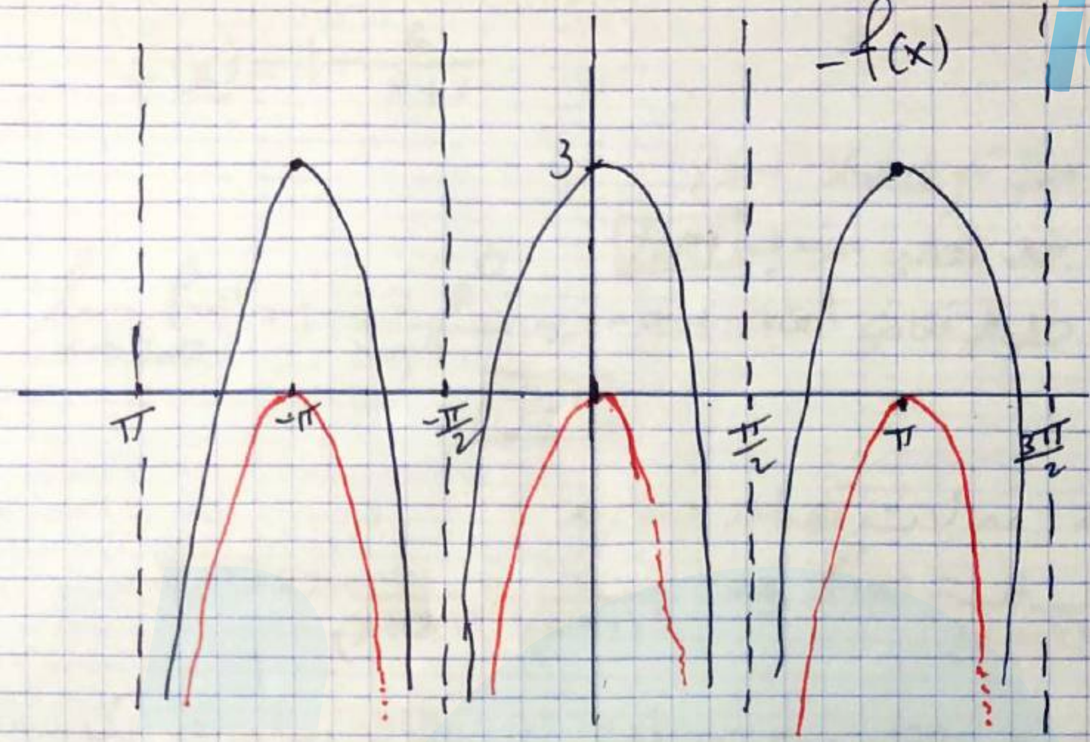


هـ - $g(x) = f(-x) + b$ // b برامتر.

وحسب المعطيات الرسم البياني للدالة g يمس المحور x.

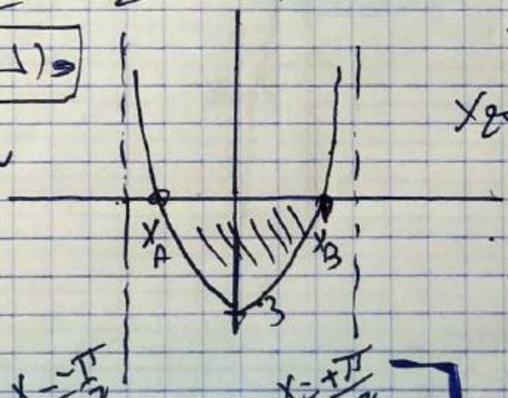
بما ان $f(-x) = f(x)$ لذلك $g(x) = -f(x) + b$

وبالتالي الرسم البياني $-f(x)$ سيكون كالتالي: ←



بما ان $g(x)=-f(x)+b$ اي ان الدالة g عبارة عن ازاحة افقية بمقدار b وحدات. وبما ان رسم g يمس المحور x لذلك نقاط التماس ستكون بالاحداثي x للنقاط القصوى. كما هو مبين بالرسم المتقطع الاحمر وبالتالي الازاحة $\boxed{b=-3}$

و. الرسم البياني للدالة $f(x)$ في المجال $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ هو كما مبين بالرسم:



نجد نقاط التقاطع مع x

$f(x)=0 \to \frac{1}{\cos^2 x}-4=0$

$\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2} \to -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

$\boxed{x_1=\frac{\pi}{3}}$ $\boxed{x_2=-\frac{\pi}{3}}$

والمساحة المخططة هي المطلوبة

بما ان الدالة زوجية لذلك المساحة المخططة هي:

$$\left|2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}-4\,dx\right|$$

$$2\left|\left[tg\,x-4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| = 2\left|\left(tg\frac{\pi}{3}-4\cdot\frac{\pi}{3}\right)-\left(tg\,0-4(0)\right)\right|$$

$$=2\cdot\left|-2.455\right|=4.91 \longrightarrow \boxed{S=4.91}$$

حل سؤال 8

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

أ- مجال تعريف الدالة $x \neq -1$

خط تقارب عمودي $\boxed{x = -1}$

خطوط تقارب أفقية: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 - \frac{2}{\pm\infty + 1} = 1 - 0 = 1$

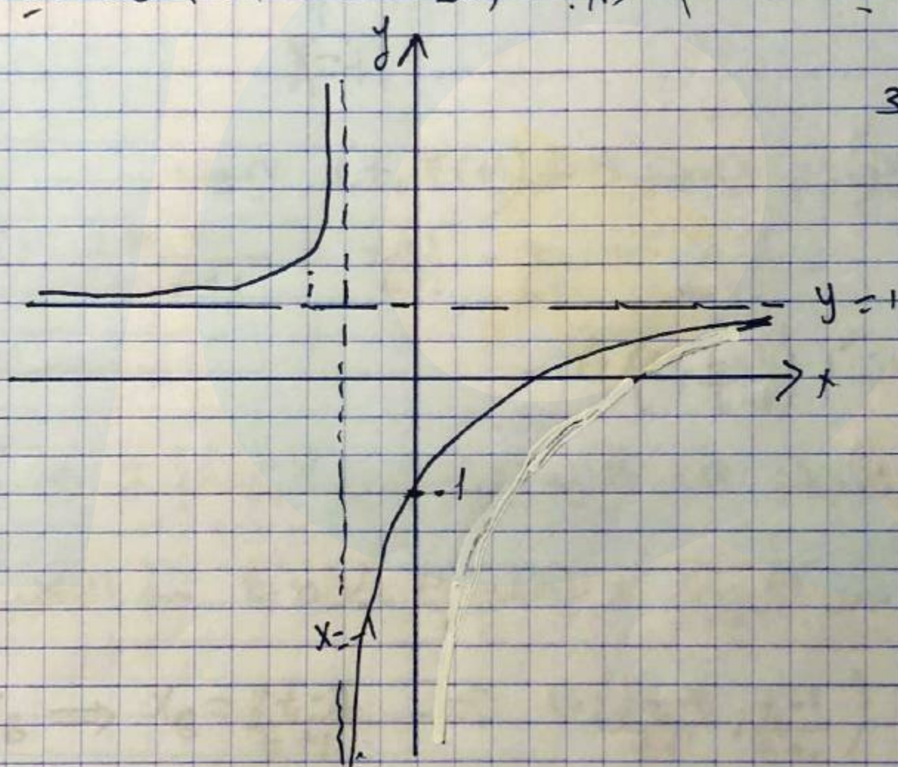
$\boxed{y = 1}$

أ.2 مجالات تصاعد وتنازل:

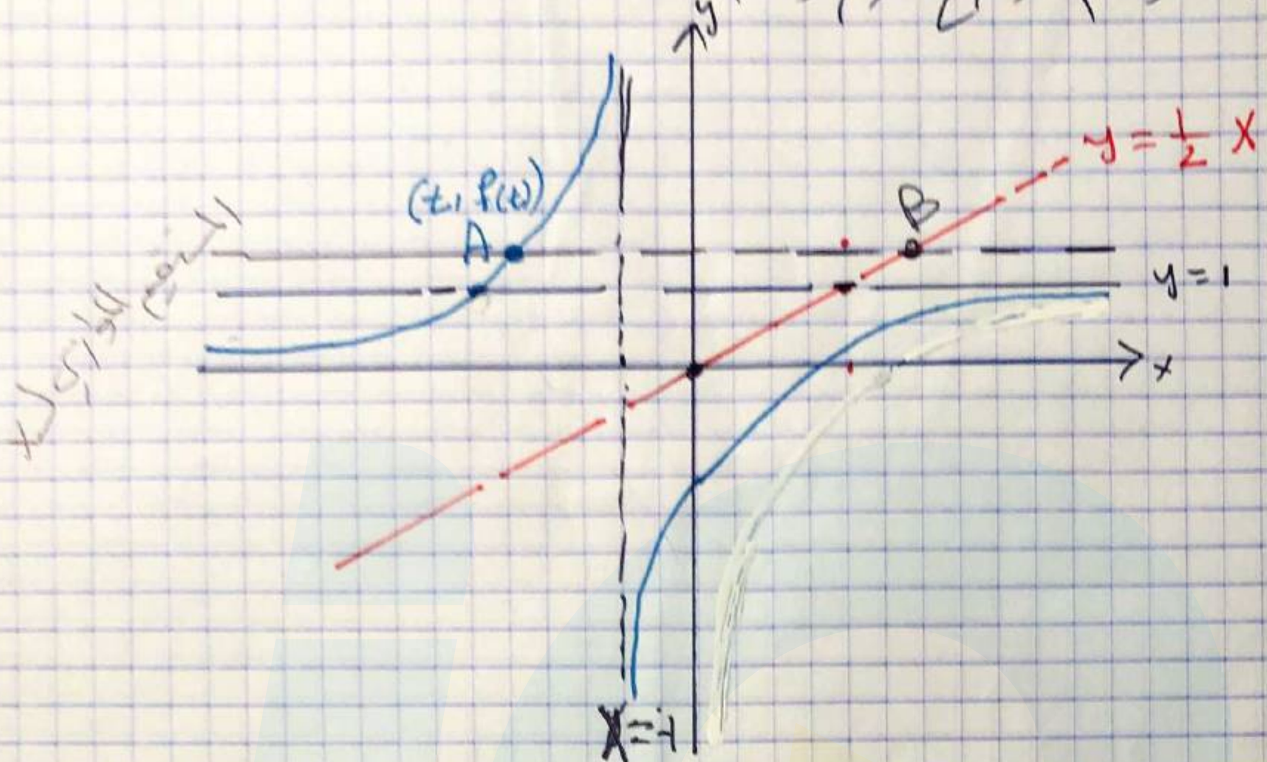
$$f'(x) = 0 - \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

البسط والمقام موجبان, لذلك الدالة تصاعدية لكل $x \neq -1$

أ.3



ب. نرسم الوضع الموصوف بالسؤال:



احداثيات النقطة A هي $(t, f(t))$ بحيث

$$f(t) = 1 - \frac{2}{t+1} = \frac{t+1}{t+1} - \frac{2}{t+1} = \frac{t-1}{t+1}$$

اذاً $A\left(t, \frac{t-1}{t+1}\right)$.

للنقطة A و B يوجد نفس الاحداثي y $\Leftarrow$ $y_B = y_A = \frac{t-1}{t+1}$

نجد الاحداثي x للنقطة B بدلالة t $\Leftarrow$ النقطة B تقع على $y = \frac{1}{2}x$

$$\Rightarrow \frac{t-1}{t+1} = \frac{1}{2}x_B \Rightarrow x_B = \frac{2t-2}{t+1} \Rightarrow B\left(\frac{2t-2}{t+1}, \frac{t-1}{t+1}\right)$$

نعرض ان الدالة $g(t)$ تعبر عن طول القطعة AB

طول القطعة AB هو $x_B - x_A$ وبالتالي

$$g(t) = \frac{2t-2}{t+1} - t$$

$$g'(t) = \frac{2(t+1) - 1(2t+2)}{(t+1)^2} - 1 = \frac{\cancel{2t} + 2 - \cancel{2t} + 2}{(t+1)^2} - 1$$

$$g'(t) = \frac{4}{(t+1)^2} - 1 \longrightarrow g'(t) = 0$$

$$\frac{4}{(t+1)^2} - 1 = 0 \longrightarrow \frac{4}{(t+1)^2} = 1 \Longrightarrow (t+1)^2 = 4$$

$$\Longrightarrow t+1 = \sqrt{4} = 2 \quad \text{او} \quad t+1 = -\sqrt{4} = -2$$

$$\boxed{t=1} \quad \text{او} \quad \boxed{t=-3}$$

بما أن $t<0$ لذلك $\boxed{t=-3}$

نصنف النقطة:

$$g'(-2) = \frac{4}{(-2+1)^2} - 1 = 4-1 = 3 > 0 \nearrow$$

$$g'(-4) = \frac{4}{(-4+1)^2} - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} < 0 \searrow$$

x	-4	-3	-2
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	min	$\nearrow$

اذاً $\boxed{t=-3}$ هي نقطة مينيمام
لدالة البعد بين A و B وتعطينا
اقصر بعد بين A و B