حل نموذج بجروت

481 (804)

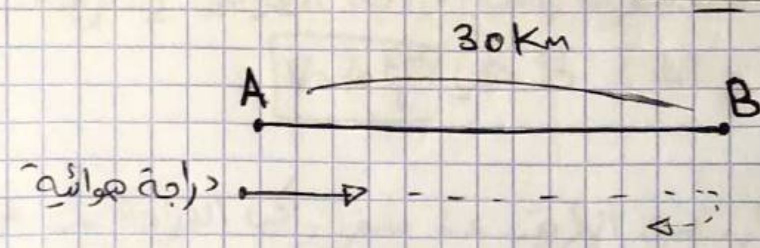
موعد مُتعدرين

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الاول



نفرض سرعة راكب الدراجة بطريقه من المدينة A الى B هي $\underline{V}$.

من هنا سرعته بطريق العودة (من B الى A) هي V-5

	سرعة	زمن	مسافة
A → B	V	$\boxed{\frac{30}{V}}$	30
B → A	$V-5$	$\boxed{\frac{30}{V-5}}$	30

زمن = $\frac{\text{مسافة}}{\text{سرعة}}$

زمن = $\frac{30}{V}$

زمن = $\frac{\text{مسافة}}{\text{سرعة}}$

زمن = $\frac{30}{V-5}$

(أ) معطى ان زمن العودة من B الى A اطول بنصف ساعة من زمن السفر الى B.

من هنا:

$$\frac{30}{V-5} = \frac{30}{V} + \frac{1}{2} \quad / \cdot V(V-5)\cdot 2$$

$$30V\cdot 2 = 30\cdot 2(V-5) + V(V-5)$$

$$\cancel{60V} = \cancel{60V} - 300 + V^2 - 5V$$

$$0 = V^2 - 5V - 300$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot(-300)}}{2} =$$

$$\frac{5 \pm 35}{2} \rightarrow \frac{40}{2} = \boxed{20}$$

$$\frac{5 \pm 35}{2} \rightarrow \frac{-30}{2} = \boxed{\cancel{-15}}$$

ملغي لان V متغير موجب

من هنا سرعة راكب الدراجة الهوائية في طريقه
الى البلدة B هي $\boxed{V=20\frac{km}{h}}$

(ب)* منتصف الطريق عند سفر راكب الدراجة من A الى B
اي انه قطع 15 كم وسرعته 20 كم/س

$$15=20\cdot t$$

$$t=\frac{15}{20}=\frac{3}{4} \text{ الساعة}$$

اي وصل لمنتصف الطريق بين A و B في طريقه الى البلدة B
في الساعة $\boxed{9:45}$.

*منتصف الطريق بين المدينة A و B في طريقه الى المدينة A اي
انه قطع مسافة 30 كم بسرعة 20 كم/س ومسافة 15 كم
بسرعة 15 كم/س.
نقسم الطريق لمرحلتين ونجد الزمن في المرحلتين ثم نجمعهم:

I. عند وصوله للبلدة B:

$$30=t_1\cdot 20$$

$$t_1=\frac{3}{2}=1.5 \text{ ساعة}$$

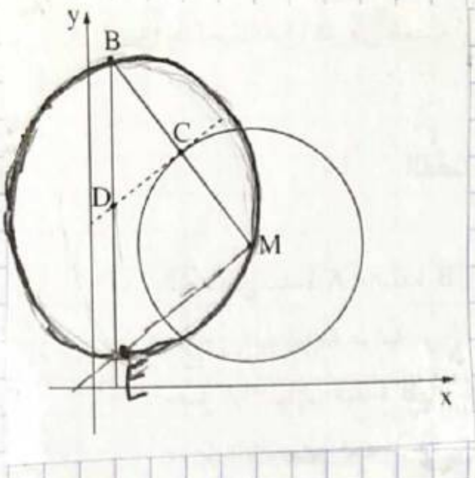
II. قطع 15 كم باتجاه البلدة A:

$$15=t_2\cdot 15$$

$$t_2=1 \text{ ساعة}$$

اي انه وصل لمنتصف الطريق بين A و B في طريق عودته
الى البلدة A في الساعة: $9+1.5+1=\boxed{11:30}$

السؤال الثاني:



مركز الدائرة $M(7,6)$

$B(1,14)$, $MC=CB$

(أ) نجد النقطة C حسب منتصف قطعة:

$$\underset{(7,6)}{M} \text{———} C \text{———} \underset{(1,14)}{B}$$

$$x_c = \frac{x_M + x_B}{2} \qquad y_c = \frac{y_M + y_B}{2}$$

$$x_c = \frac{7+1}{2} = 4 \qquad y_c = \frac{14+6}{2} = 10$$

$$\boxed{C(4,10)} \Leftarrow$$

نصف قطر الدائرة هو MC.

نجد طول MC (R):

$$d_R = d_{MC} = \sqrt{(7-4)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

أي: $R=5$ وحدات طول.

من هنا معادلة الدائرة:

$$\boxed{(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25}$$

(ب) ميل المماس نجده حسب ضرب الميول وذلك حسب تعريف المماس يعامد نصف القطر في نقطة التماس اذا:

$MC \perp CD$

نجد ميل MC: $m_{MC} = \frac{6-10}{7-4} = \frac{-4}{3}$

$$\boxed{m_{MC} = \frac{-4}{3}}$$

$$m_{MC} \cdot m_{CD} = -1$$

$$-\frac{4}{3} \cdot m_{CD} = -1$$

$$\boxed{m_{CD} = \frac{3}{4}}$$

نعوض النقطة $C(4,10)$ في معادلة المماس لنجد المعادلة:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

$$10 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b$$

$$b = 7 \Rightarrow \boxed{y_{CD} = \frac{3}{4}x + 7}$$

ج) $\angle DCB = 90°$ وذلك لان $MC \perp CD$ و MB هو امتداد نصف القطر MC بالتالي $MC \perp CB$ ايضًا.

وبما ان من B انزلوا عامودًا لمحور X و النقطة D تقع على هذا العمود بالتالي $X_B = X_D$.

نعوض X_D في معادلة المماس لنجد احداثي y_D.

$$X_D = X_B = 1$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot 1 + 7$$

$$\boxed{D(1, 7.75)} \Leftarrow \boxed{y = 7.75}$$

نجد طول DC: $C(4,10)$, $D(1, 7.75)$

$$d_{DC} = \sqrt{(1-4)^2 + (7.75-10)^2} = \sqrt{9 + 5.0625}$$

$$\boxed{d_{DC} = 3.75 \text{ وحدات طول}}$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{BC \cdot CD}{2}$$

$$.5 = BC = MC$$

$$CD = 3.75$$

$$\Leftarrow \quad S_{\triangle BCD} = \frac{5 \cdot 3.75}{2} =$$

$$\boxed{S_{\triangle BCD} = 9.375 \text{ وحدات مساحة}}$$

د) $X_E = X_B$ ← E تقع على العمود الذي انزلوه من النقطة B.

بما ان $ME \parallel CD$ اذاً ميل ME = ميل CD.

نجد معادلة ME.

نعوض $m = \frac{3}{4}$ و $M(7,6)$:

$$6 = \frac{3}{4} \cdot 7 + b$$

$$\boxed{b = \frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{ME} = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}$$

نعوض في معادلة ME ← $X_E = 1$ ونجد احداثي y للنقطة E.

$$y_E = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1.5$$

$$\Leftarrow \boxed{E(1, 1.5)}$$

(هـ) بما ان $CD \parallel ME$ اذاً ME يعامد MC ايضاً.

بالتالي $\sphericalangle CME = 90^\circ$

وبما ان $\sphericalangle CME$ تقع على محيط الدائرة التي تحصر ΔBME.

اذاً حسب النظرية العكسية $\Leftarrow$ اذا كانت الزاوية المحيطية في الدائرة قائمة بالتالي هي مقابلة لقطر الدائرة، من هنا نستنتج ان BE هو قطر الدائرة المحصورة.

اذاً مركز الدائرة هي منتصف BE.

نجد منتصف BE:

$B(1,14)$ —— $E(1,1.5)$

$$x = \frac{1+1}{2} = 1 \qquad y = \frac{14+1.5}{2} = 7.75$$

احداثيات هذه النقطة تعود للنقطة D، بالتالي

النقطة $D(1,7.75)$ هي مركز الدائرة التي تحصر ΔBME.

السؤال الثالث :

نسبة الذين يرغبون بتعلّم الحاسوب : 40%

نسبة الذين لا يرغبون بتعلّم الحاسوب : 60%

عدد الطلاب الصف الحادي عشر الذين شاركوا في الاستطلاع نفرضه $3X$.

بالتالي عدد الطلاب الصف الثاني عشر الذين شاركوا في الاستطلاع : X .

عدد الطلاب من الصف الثاني عشر الذين يرغبون بتعلم الحاسوب : $60\% \cdot X$

(أ) عدد الطلاب الذين يرغبون بتعلّم الحاسوب (من المعطيات) :

(1)

$$40\% \cdot (3X+X) = \frac{40}{100} \cdot 4X = \boxed{1.6X}$$

من هنا نجد بدلالة X عدد الطلاب من الصف الحادي عشر الذين يرغبون بالتعلّم (نفرضهم M)

$$1.6X = \frac{60}{100} \cdot X + M$$

$$M = 1.6X - 0.6X$$

$$\boxed{M = X}$$

أي النسبة المئوية لهم من طلاب الحادي عشر هو $\frac{X}{3X} = \boxed{\frac{1}{3}}$

أي $\boxed{33\frac{1}{3}\%}$.

الاحتمال باختيار طالب من الصف الحادي عشر يرغب بالتعلم $=$ $\dfrac{\text{اختيار طالب من الصف حادي عشر يرغب بالتعلم}}{\text{جميع الطلاب الذين شاركوا بالاستطلاع}}$.

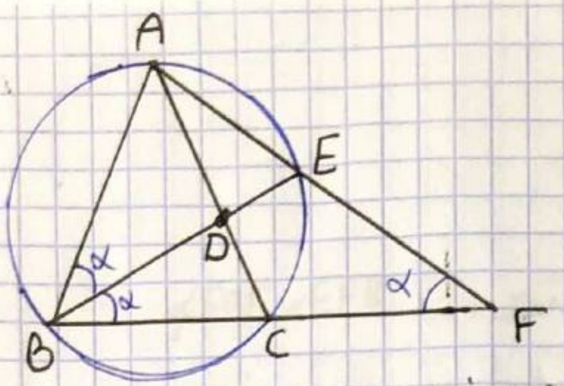
الاحتمال $= \dfrac{X \ (\text{عدد الطلاب})}{4X \ (\text{عدد الطلاب})} = \boxed{\frac{1}{4}}$

(2)

$$P\left(\text{يرغبون بالتعلم من الصف الحادي عشر} \,/\, \text{طلاب أو بالصف الحادي عشر}\right) = \frac{x}{3x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(ب) $$P\left(\text{2 من بين 4 هم طلاب من الصف الحادي عشر يرغبون بتعلم الحاسوب}\right) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{27}{128}}$$

احتمال اختيار طالب من الصف الحادي عشر يرغبا بالتعلم (من البنود السابقة).



السؤال الرابع :

$\angle ABE = \angle EBC = \angle AFB$

$EF = 16 ,\ AF = 25$

P) ① من المعطى نستنتج أنّ BD ينصف الزاوية $\angle ABC$.

المطلوب: برهان $\Delta BAE \sim \Delta FAB$

الحل: $\Delta FAB \sim \Delta BAE$ ← ز ز ز

(1) $\angle AFB = \angle ABE$ ، من المعطى

(2) $\angle BAE = \angle BAF$ (زاوية مشتركة)

(3) $\angle ABF = \angle AEB \Rightarrow$ زاوية مكملة لـ $180°$

من هنا: $\frac{FA}{BA} = \frac{AB}{AE} = \frac{FB}{BE}$

وهو المطلوب ①

② من التشابه:

$$\frac{FA}{BA} = \frac{AB}{AE}$$

نجد AE:

$AE = AF - FE$

$AE = 25 - 16 = 9$

$$\frac{25}{AB} = \frac{AB}{9}$$

$$\sqrt{AB^2} = \sqrt{225}$$

$\boxed{AB = 15}$ وهذا طول

وهو المطلوب ②

③ من التشابه :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BF}{BE}$$

$\triangle BEF$ متساوي الساقين ⇐ $\angle EBF = \angle EFB$

اذاً $BE = EF = 16$.

⇐ $\frac{15}{9} = \frac{BF}{16}$

$\boxed{BF = 26\frac{2}{3}}$ وحدات طول

وهو المطلوب ③

(ب) المطلوب: برهن ان: $\triangle AEC \sim \triangle BEF$

الحل: $\angle EFB = \underbrace{\angle EBC = \angle CAE}_{\text{ב}}$.

زوايا محيطية مقابلة لنفس القوس اذاً الزوايا متساويات.

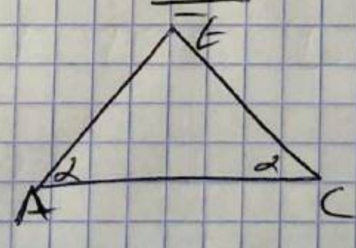
نفرض ان $\angle AFB = \alpha$,

اذاً: $\alpha = \angle EBF = \angle EFB = \angle FAC$.

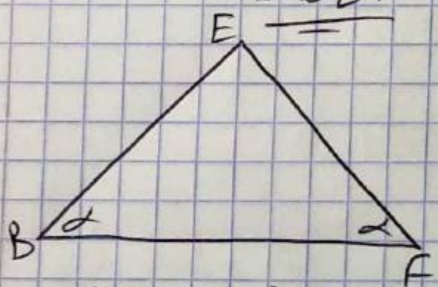
وكذلك ، $\angle ABE = \angle ACE$ ← زوايا محيطية مقابلة لنفس الوتر.

اي: $\angle ACE = \alpha$ ايضاً.

من هنا: $\triangle ACE$, $\triangle BEF$



$\angle E = 180° - 2\alpha$



$\angle BEF = 180° - 2\alpha$

من هنا: $\triangle BEF \sim \triangle AEC$ ← ز.ز.ز:

① $\angle AEC = \angle BEF$

② $\angle ACE = \angle BFE$

③ $\angle CAE = \angle FBE$

وهو المطلوب (ب)

(ب) من التشابه :

$$\frac{AE}{BE}=\frac{EC}{EF}=\frac{AC}{BF}$$

ΔAEC متساوي الساقين اذا: $AE=EC=9$ $(\sphericalangle ECA=\sphericalangle EAC)$

نجد AC:

$$\frac{9}{16}=\frac{AC}{26\frac{2}{3}}$$

$\boxed{AC=15 \text{ وحدات طول}}$

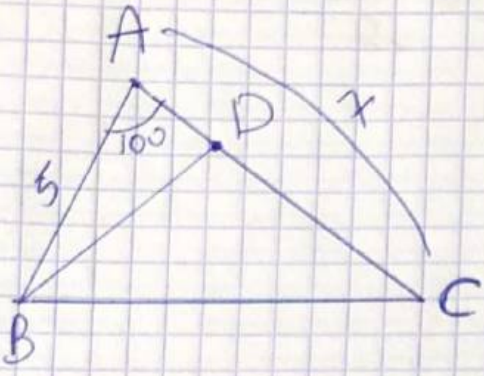
ΔACF متساوي الساقين: $\sphericalangle CAF=\sphericalangle AFC$

بالتالي: $AC=CF=15$ وحدات طول.

اي $\boxed{CF=15}$

وهو المطلوب (2)

السؤال الخامس:



$\measuredangle BAC = 100°,\ AC = 7\ ,\ AB = 5$

$BD = DC$

أ) نجد BC حسب قانون cos الموسع:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(100°)$$

$$BC^2 = 25 + 49 - 70 \cdot \cos(100°)$$

$$BC^2 = 86.15537$$

$$\boxed{BC = 9.282}$$ وحدات طول

ثم نجد $\measuredangle BCA$ حسب قانون sin الموسع.

$$\frac{AB}{\sin(BCA)} = \frac{BC}{\sin(100°)}$$

$$\frac{5 \cdot \sin(100)}{9.282} = \sin(BCA)$$

$$\boxed{\measuredangle BCA = 32.04°}$$

ب) R_1 هو نصف القطر الدائرة التي تحصر ΔABD.

R_2 هو نصف القطر للدائرة التي تحصر ΔBDC.

حسب قانون sin الموسع:

(I) $2R_1 = \frac{BD}{\sin(100)}$

$$\boxed{R_1 = \frac{BD}{2\sin(100)}}$$

(II) $2R_2 = \frac{BD}{\sin(32.04°)}$

$$\boxed{R_2 = \frac{BD}{2\sin(32.04°)}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{\cancel{BD}}{\cancel{2}\sin(104^\circ)}}{\frac{\cancel{BD}}{\cancel{2}\sin(32.04^\circ)}} = \frac{\sin(32.04^\circ)}{\sin(104^\circ)} = \boxed{0.539}$$

اي النسبة بين R_1 و R_2 هي $\boxed{0.539}$

السؤال السادس:

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{x^2}$$

(أ) $x^2 \neq 0$

$\boxed{x \neq 0}$

(ب) خط تقارب عمودي:

$f(0) = \frac{-0-20+8}{0} = \frac{8}{0} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ = خط تقارب عمودي

خطوط تقارب افقية:

$x \to -\infty$	y
-100	-0.9792
-1000	-0.997992
-10000	-0.9997

$x \to \infty$	y
100	-1.0192
1000	-1.001992
10000	-1.0001992

$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = -1}$

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1}$

$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1}$ و $\boxed{x = 0 \text{ خط تقارب عمودي}}$

(ج) تقاطع مع محور x: $y = 0$:

$0 = -x^2 - 2x + 8 \quad /(-1)$

$0 = x^2 + 2x - 8$

$(x+4)(x-2) = 0$

$\boxed{x = -4}$ $\boxed{x = 2}$ $\Rightarrow \boxed{(2,0), (-4,0)}$

لا يوجد تقاطع مع محور y لان مجال تعريف الدالة $x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{(-2x-2)\cdot x^2 - (2x)(-x^2-2x+8)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{-2x^3} - 2x^2 + \cancel{2x^3} + 4x^2 - 16x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 16x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x-16)}{x^4}$$

بما ان $x \neq 0$ مجال تعريف الدالة اذاً نستطيع اختزال x.

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x-16}{x^3}}$$

$f'(x) = 0$

$0 = 2x - 16$

$0 = x - 8$

$\boxed{x = 8}$

	(-1) $x<0$	$x=0$	(1) $0<x<8$	$x=8$	(9) $x>8$
$f'(x)$	+	//	−	0	+
$f(x)$	↗	//	↘	min	↗

$$f'(-1) = \frac{2(-1) - 16}{(-1)^3} = \frac{-}{-} = +$$

$$f'(1) = \frac{2-16}{(1)^3} = \frac{-}{+} = -$$

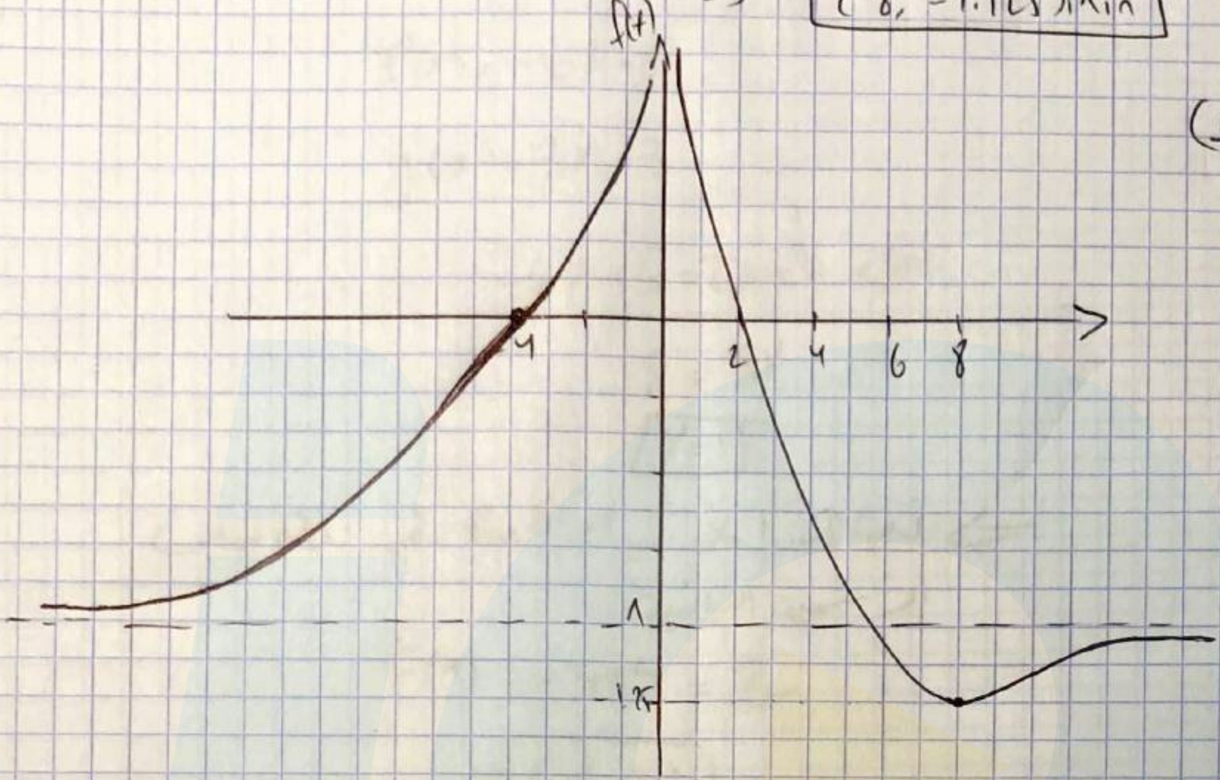
$$f'(9) = \frac{18-16}{9^3} = \frac{+}{+} = +$$

نجد احداثي y للنقطة القصوى :

$$f(8) = \frac{-64+16+8}{64} = \boxed{-1.125}$$

$$\Rightarrow \boxed{(8, -1.125)_{min}}$$

(هـ)



(و) $g'(x) = f(x)$

ميل المماس للدالة $g(x)$ هو جواب $g'(x)$.

المماس الذي يوازي محور x - تحقق $g'(x) = f(x) = 0$.

من الرسم اعلاه نجد ان احداثيات ال x التي تحقق

هذا هي : $\boxed{x = 2}$ او $\boxed{x = -4}$

السؤال السابع:

$g(x) = x^2 - 3x + c \quad , \quad f(x) = -3x^2 + 5x$

(أ) ① $f'(x) = g'(x)$ لنجد احداثي x للنقطة المشتركة.

$f'(x) = -6x + 5$

$g'(x) = 2x - 3$

$\Leftarrow -6x + 5 = 2x - 3$

$8 = 8x$

$\boxed{x = 1}$

$\Leftarrow$ نعوض $x=1$ في الدالة $f(x)$ لنجد نقطة تماس الرسمين البيانيين.

$f(1) = -3 + 5 = \underline{\underline{2}}$

$\Rightarrow \boxed{(1,2)}$

② نعوض نقطة التماس في الدالة $g(x)$ ونجد c:

$2 = \overset{-2}{\boxed{1 - 3}} \cdot 1 + c$

$2 = -2 + c$

$\boxed{c = 4}$

(ب) نعوض $x=1$ في الدالة $g'(x)$ لنجد ميل المماس:

$g'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = \underline{\underline{-1}}$

ثم نعوض النقطة $(1,2)$ في معادلة المماس لنجد المعادلة كاملة:

$2 = \overset{-1}{-1 \cdot 1} + b$

$\boxed{3 = b} \Rightarrow \boxed{y = -x + 3}$

(ج) نجد تقاطع المماس مع محور y:

$y = 0+3 = 3$

$\boxed{(0,3)}$

x:

$0 = -x+3$

$\boxed{x=3}$

$\boxed{(3,0)}$

ثم نجد تقاطع $g(x)$ مع محور y:

$g(0) = 0 - 3\cdot 0 + 4$

$g(0) = 4 \Rightarrow \boxed{(0,4)}$

ثم نجد تقاطع $f(x)$ مع محور x:

$0 = -3x^2+5x$

$0 = x(-3x+5)$

$\boxed{x=0}$

$-3x = -5$

$\boxed{x = \frac{5}{3}}$

$\boxed{(0,0)}$, $\boxed{(\frac{5}{3},0)}$

$$S_1 = \int_0^1 f(x) - \text{المماس}\, dx = \int_0^1 -3x^2+5x-\overbrace{(-x+3)}^{+x-3}\, dx =$$

$$\int_0^1 -3x^2+6x-3\, dx = -x^3+3x^2-3x\Big|_0^1$$

$$S_1 = \left(\left(\overbrace{-(1)^3}^{-1} + 3\cdot 1 \overbrace{-3\cdot 1}^{-3}\right) - \left(\overbrace{-0+3\cdot 0-0}^{0}\right)\right) = |-1| = 1$$

$$S_2 = \int_0^1 [illegible] - g(x)\,dx = \int_0^1 -x+3-(x^2-3x+4)\,dx =$$

$$\int_0^1 -x+3-x^2+3x-4\,dx = \int_0^1 -x^2+2x-1\,dx =$$

$$-\frac{x^3}{3}+x^2-x\Big|_0^1$$

$$S_2 = \left(-\frac{1}{3}\cancel{+1}\cancel{-1}\right) - \left(\overbrace{\frac{0}{3}+0-0}^{0}\right) = \left|\boxed{-\frac{1}{3}}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{+1}{+\frac{1}{3}} = \boxed{3}$$

السؤال الثامن :

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-3}}$$

(أ) $y-3>0$

$$\boxed{y>3}$$

(ب) نعرّف الدالة الجديدة $b(x) \Leftarrow$ عبارة عن ضرب احداثي x باحداثي y

احداثي x : t

احداثي y : $\frac{4}{\sqrt{t-3}}$

$$b(t)=\frac{t\cdot 4}{\sqrt{t-3}}$$

$$b'(t)=\frac{4\cdot\sqrt{t-3}-\frac{1}{2\sqrt{t-3}}\cdot 4t}{t-3}$$

$$b'(t)=\frac{\overset{8t-24}{8(t-3)}-4t}{2\sqrt{t-3}\,(t-3)}=\frac{\overset{2(2t-12)}{+4t-24}}{\cancel{2}(t-3)^{1.5}}=\boxed{\frac{2t-12}{(t-3)^{1.5}}}$$

$b'(t)=0$:

$0=2t-12$

$$\boxed{t=6}$$

	$3<t<6$ (4)	$t=6$	$t>6$ (7)
$b'(t)$	−	0	+
$b(t)$	↘	min	↗

$$b'(4)=\frac{\overset{8}{2\cdot 4}-12}{(4-3)^{1.5}}=-$$

$$b'(7)=\frac{\overset{14}{2\cdot 7}-12}{(7-3)^{1.5}}=+$$