حل نموذج بجروت

382 (803)

موعد صيف (أ)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

(أ)

- بحسب المعطيات اشترى كريم حقائب ومحافظ عددها الكلي 392.
- كذلك معلوم أن عدد الحقائب أكبر بـ 100 من عدد المحافظ وبالتالي اذا فرضنا عدد المحافظ X اذاً عدد الحقائب هو X+100 , ويتحقق :-

$$X+100+X=392$$

$$2X+100=392 \Rightarrow 2X=392-100$$

$$\Rightarrow 2X=292 \Rightarrow X=\frac{292}{2} \Rightarrow \boxed{X=146}$$

اذاً اشترى كريم $\boxed{146}$ محفظة و $146+100 \Rightarrow \boxed{246}$ حقيبة

(ب) دفع كريم مقابل المحافظ والحقائب مبلغ كلي مقداره 38985

ثمن الحقيبة 4 اضعاف ثمن المحفظة .

نفرض ثمن المحفظة y اذاً ثمن الحقيبة 4y .

مقابل المحافظ دفع $\boxed{146y}$

مقابل الحقائب دفع $246 \cdot 4y \rightarrow 984y$

وبالتالي يتحقق :-

$$\underbrace{984y}_{\text{ثمن الحقائب}}+\underbrace{146y}_{\text{ثمن المحافظ}}=38985$$

$$1130y=38985 \Rightarrow y=\frac{38985}{1130}=34.5$$

اذاً ثمن المحفظة الواحدة $\boxed{y=34.5}$

وثمن الحقيبة الواحدة $4y \rightarrow 4\cdot(34.5)=$ $\boxed{138}$ شيكل

ج.1 بحسب المعطى باع كريم الحقائب بنسبه ربح 30%
والمحافظ بنسبه ربح 20%

الربح الذي حصل عليه كريم = المبلغ الذي باع فيه الاغراض

— المبلغ الذي اشترى فيه الاغراض.

المبلغ الذي اشترى فيه الأغراض هو 38985

نجد المبلغ الذي باع فيه كل الأغراض:

المبلغ الذي باع فيه الحقائب (ربح 30%)

هو: ثمن الحقيبه * عدد الحقائب × (100%+30%)

$\underset{1.3}{130\%} \cdot 246 \cdot 138 = 44132.4$

المبلغ الذي باع فيه المحافظ هو: (ربح 20%).

ثمن المحفظه * عدد المحافظ × (100%+20%)

$\underset{1.2}{120\%} \cdot 146 \cdot 34.5 = 6044.4$

والمجموع باع الاغراض بمبلغ كلي مقداره:

$\underset{\text{مقابل الحقائب}}{44132.4} + \underset{\text{مقابل المحافظ}}{6044.4} = 50176.8$

الربح = مبلغ البيع — مبلغ الشراء

الربح $= 50176.8 - 38985 = 11,191.8$

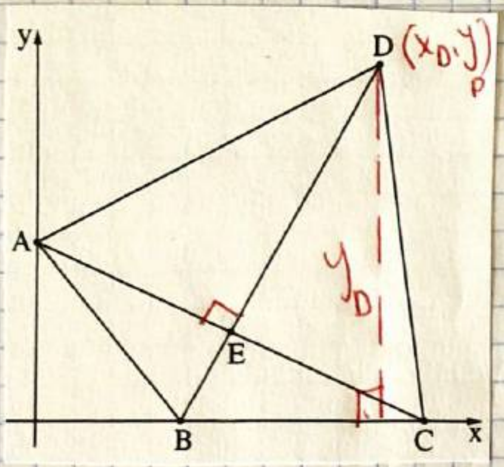
$\boxed{\text{اذًا الربح من البيع } 11,191.8}$

ج.2 نسبة الربح هي $\frac{11191.8}{38985} = 0.287$ ولكي نجد النسبه

المئويه للربح نضرب ب 100%، نحصل على $0.287 \cdot 100\%$

$\boxed{28.7\%}$

حل سؤال 8



أ. بحسب المعطيات

E هي نقطة التقاء أقطار الشكل الرباعي

$C:(x_C,0)$ $\quad B(x_B,0)$ $\quad A(0,y_A)$

$AC: y = -\frac{1}{2}x + 4$

لكي نجد الإحداثي y_A نعوض $x=0$

$y_A = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 4 \Rightarrow y_A = 4$

$\boxed{A(0,4)}$

ب. لكي نجد x_C نعوض $y=0$ في معادلة AC . (تقاطع مع x c)

$0 = -\frac{1}{2}x_C + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}x_C = 4 \xRightarrow{*2} \boxed{x_C = 8}$

$\boxed{C:(8,0)}$

ب. بحسب المعطيات القطر AC يعامد القطر BD

ولذلك ميل $BD = \frac{-1}{\text{ميل } AC}$

$\Rightarrow \text{ميل}_{BD} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \boxed{\text{ميل}_{BD} = m_{BD} = 2}$

كذلك معطى ان E منتصف AC إذاً نحسب إحداثيات منتصف قطعة:

$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+8}{2} = 4$

$y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$

$\Rightarrow E(4,2)$

وبالتالي BD $m_{BD}=2$ ويمر بـ $E(4,2)$ ومعادلته $y=mx+n$

نعوض ونجد n: ←

$2 = 2\cdot 4 + n \Rightarrow 2 = 8 + n \Rightarrow n = 2-8 \Rightarrow \boxed{n=-6}$

$\boxed{BD: y = 2x - 6}$

(2 ج) النقطة B تقع على المحور X ولذلك هي من الصورة $B(x_B,0)$
النقطة B تقع على القطر BD لذلك نعوض
$y_B=0$ في معادلة القطر ونجد x_B :

$$0=2x_B-6 \Rightarrow -2x_B=-6 \Rightarrow x_B=\frac{-6}{-2}=3$$

اذاً $B(3,0)$

(1.د 2+) بحسب المعطيات مساحة المثلث BDC هي 20
قاعدة المثلث هي BC، والارتفاع مساوٍ للاحداثي y
للنقطة D - نرمز له y_D - لذلك يتحقق :

$$S_{\triangle BDC}=\frac{BC\cdot y_D}{2}=20 \xrightarrow{\times 2} BC\cdot y_D=40$$

$$BC=x_C-x_B=8-3=5$$

$$\Rightarrow BC\cdot y_D=40 \Rightarrow 5\cdot y_D=40 \Rightarrow y_D=\frac{40}{5}=8$$

اذاً $\boxed{y_D=8}$

(3.د) النقطة $D(x_D,8)$ وتقع على المستقيم BD, $BD: y=2x-6$
نعوض $y=8$ ونجد x_D

$$8=2x_D-6$$

$$\Rightarrow 8+6=2x_D \Rightarrow 14=2x_D \Rightarrow \frac{14}{2}=x_D \Rightarrow \boxed{x_D=7} \rightarrow \boxed{D(7,8)}$$

د. مساحة المثلث BDA هي $\frac{BD\cdot EA}{2}$ (EA عمودياً على BD اي ارتفاع)

$$E(4,2), A(0,4) \Rightarrow AE=\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\boxed{\sqrt{20}}$$

$$B(3,0), D(7,8) \Rightarrow BD=\sqrt{(7-3)^2+(8-0)^2}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{16+64}=\boxed{\sqrt{80}}$$

$$S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{80}}{2}=\frac{\sqrt{20\cdot 80}}{2}=\frac{\sqrt{1600}}{2}=\frac{40}{2}=20=$$ نفس مساحة $\triangle BDC$

حل سؤال 3

أ. معادلة الدائرة هي

$$(x-3)^2+(y+4)^2=50$$

لكي نبرهن ان النقطة $A(-2,1)$ تقع على الدائرة

نبرهن انها تحقق معادلتها، نعوض A بالدائرة

$$(-2-3)^2+(1+4)^2\overset{?}{=}50$$

$$(-5)^2+(5)^2\overset{?}{=}50$$

$$25+25=50 \Rightarrow 50=50 \checkmark$$

وبالفعل $A(-2,1)$ تقع على الدائرة.

ب.(1) من معادلة الدائرة $(x-3)^2+(y+4)^2=50$

نستنتج ان مركز الدائرة هو $M(3,-4)$

واحداثيات $A(-2,1)$ لذلك نصف قطر الدائرة ميله:

$$\text{ميل } MA=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-4-1}{3-(-2)}=\frac{-5}{5}=-1$$

$\boxed{\text{اذا ميل نصف القطر } MA=-1}$

ب.(2) المماس للدائرة في النقطة A

عموديا على نصف القطر MA

ولذلك $\text{ميل } AB=\frac{-1}{\text{ميل } MA} \Leftarrow \text{ميل } AB=\frac{-1}{-1}$

$\Leftarrow$ ميل $\boxed{AB=1}$

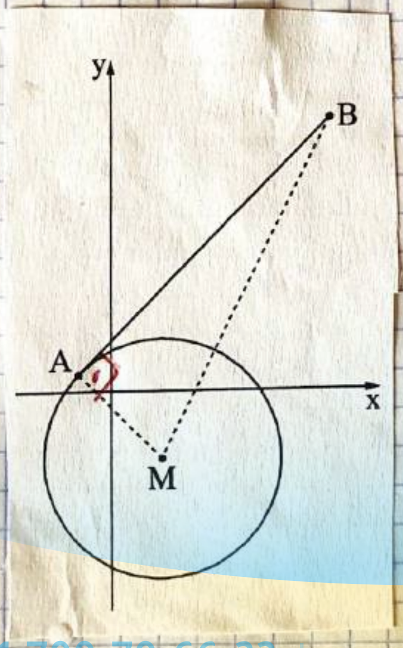
اذا ميل $AB=1$ ويمر ب $A(-2,1)$

ومعادلته من الصورة $y=mx+n$

نعوض:

$$1=1\cdot(-2)+n$$

$$1+2=n \Rightarrow n=3 \Rightarrow \boxed{AB: y=x+3}$$



ب- حسب المعطيات الإحداثي y للنقطة B هو 16

أي $B:(x_B,16)$ وتحقق معادلة المماس $y=x+3$

$\Rightarrow 16=x_B+3 \Rightarrow 16-3=x_B \Rightarrow \boxed{13=x_B}$

$$\boxed{B(13,16)}$$

ج- السؤال يطلب إيجاد معادلة الدائرة التي BM هو قطرها

بما ان BM قطر اذاً مركز الدائرة هو منتصف القطعة BM.

نفرض ان مركز الدائرة المطلوبة هو $O:(x_0,y_0)$, $B(13,16)$, $M:(3,-4)$

$$x_0=\frac{x_B+x_m}{2}=\frac{3+13}{2}=\frac{16}{2}=8 \qquad \boxed{x_0=8}$$

$$y_0=\frac{y_B+y_m}{2}=\frac{16+(-4)}{2}=\frac{12}{2}=6 \qquad \boxed{y_0=6}$$

اذاً مركز الدائرة المطلوبة هو: $O:(8,6)$

نجد نصف قطر الدائرة OM

$O(8,6)$
$M(3,-4)$ $\quad OM=\sqrt{(8-3)^2+(6-(-4))^2}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}$

اذاً $\boxed{R=\sqrt{125}}$

معادلة الدائرة من الصورة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

اي:

$$(x-8)^2+(y-6)^2=(\sqrt{125})^2$$

$$\boxed{(x-8)^2+(y-6)^2=125}$$

حل سؤال 4

$$f(x)=2x-6\cdot\sqrt{x}+7$$

مجال تعريف الدالة $x \geq 0$

ب-

$$f'(x)=2-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=2-\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=2-\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2-\frac{3}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2=\frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{(\times\sqrt{x})} 2\sqrt{x}=3 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x}=1.5 \xRightarrow{(\;)^2} x=(1.5)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2.25}$$

نجد y:

$$y=f(2.25)=2\cdot(2.25)-6\cdot\sqrt{2.25}+7$$

$$f(2.25)=4.5-6(1.5)+7=4.5-9+7=2.5$$

اذاً احداثيات النقطة القصوى هي: $(2.25, 2.5)$

نفحص النقطة ونحدد نوعها بواسطة جدول

	$x \leq 0$	$0<x<2.25$	2.25	$x>2.25$
$f'(x)$	?	$-$	0	$+$
$f(x)$	7	↘		↗

$$f(0)=7$$

$$f'(1)=2-\frac{3}{\sqrt{1}}=2-\frac{3}{1}=-1<0$$

$$f'(4)=2-\frac{3}{\sqrt{4}}=2-\frac{3}{2}=2-1.5=\frac{1}{2}>0$$

اذاً النقطة $\boxed{min\ (2.25, 2.5)}$

ج. مجالات تصاعدية وتنازلية:

نحسب جدول التصنيف :-

مجالات تصاعدية $2.25 \le x$

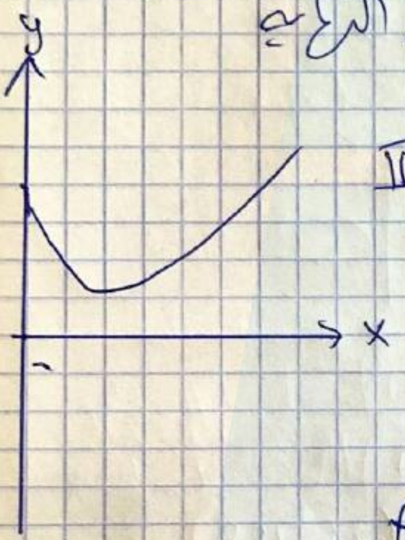
مجالات تنازلية $0 < x < 2.25$

د. من نتائج البنود السابقة نستنتج :-

تقاطع الدالة مع المحور y $(0,7)$ (من الجدول)

النقطة $min\ (2.25, 2.5)$ ← أي أن نقطة النهاية الصغرى للدالة تقع فوق المحور x.

وبالتالي الرسم الملائم هو الرسم III



ه- ميل المماس للدالة = المشتقة للدالة = 1

أي نبحث عن x التي يحققان $f'(x)=1$

$$f'(x) = 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\Rightarrow 2-1 = \frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow 1 = \frac{3}{\sqrt{x}} \xrightarrow[(\cdot\sqrt{x})]{} \sqrt{x} = 3 \underset{()^2}{\Rightarrow} x = 3^2$$

نضرب بـ$\sqrt{x}$ (نربع الطرفين)

$$\Rightarrow \boxed{x=9}$$

أي في النقطة التي الاحداثي x لها هو 9 ميل المماس للدالة 1.

نجد الاحداثي y للنقطة :-

$$f(9) = 2\cdot 9 - 6\cdot\sqrt{9} + 7 = 18 - \overset{18}{\cancel{6\cdot 3}} + 7 = 7$$

اذاً في النقطة $\boxed{(9,7)}$ ميل المماس للدالة هو 1

حل سؤال 5

الرسمين عبارة عن رسمين لدالتين تربيعيتين

ونوع رأس الدالة التربيعية يحدد حسب a (معامل x^2)

اذا كان $a>0$ اذاً رأس الدالة منزداه.

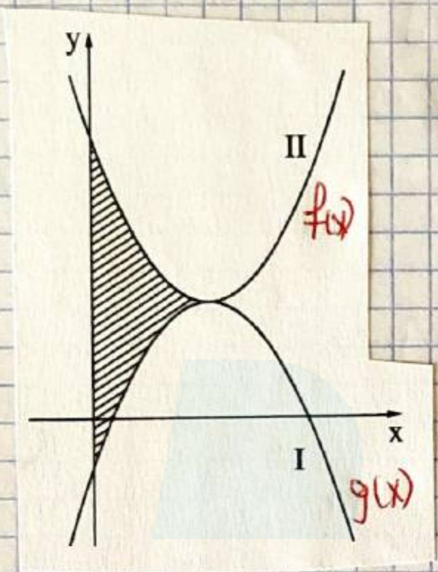
وبالتالي الرسم البياني II رأس الدالة

منزداه ويلائم للدالة f(x) التي فيها

معامل x^2 هو 1 أي $a=1>1$

وواضح ان الرسم الآخر I ملائم

للدالة g التي معامل x^2 فيها هو -2



اذاً:

f(x)	رسم I
g(x)	رسم II

الاحداثي x للنقطة رأس الدالة يحقق $x=\frac{-b}{2a}$

وبالنسبة للدالة f(x): $f(x)=2x^2-6x+8$

$b=-6 \quad a=2$

$x_{\text{الرأس}}=\frac{-(-6)}{2\cdot 2}=\frac{6}{4} \Leftarrow \boxed{x_{\text{الرأس}}=1.5}$ لـ f

بالنسبة للدالة g(x): $g(x)=-2x^2+6x-1$

$a=-2 \quad b=6$

$x_{\text{الرأس}}=\frac{-6}{2(-2)}=\frac{6}{4}=1.5$

$\boxed{x_{\text{الرأس}}=1.5}$ لـ g

نجد الاحداثي y للنقطتين

$f(1.5)=2(1.5)^2-6\cdot(1.5)+8=\underbrace{2(2.25)}_{4.5}-9+8=3.5$

$\boxed{\text{رأس } F \quad (1.5,3.5)}$

$g(1.5)=-2(1.5)^2+6(1.5)-1=\underbrace{-2(2.25)}_{-4.5}+9-1=3.5$

$\boxed{\text{رأس } g \quad (1.5,3.5)}$

يتبع الحل الصفحة التالية

د- المساحة المخططة هي المساحة بين الدالتين من $x=0$
حتى نقطة تقاطعهم $x=1.5$ اي المساحة هي

$$S_{\text{المخطط}} = \int_0^{1.5} f(x) - g(x)\, dx$$

$$S_{\text{المخطط}} = \int_0^{1.5} (2x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 6x - 1)\, dx$$

$$S_{\text{المخطط}} = \int_0^{1.5} 2x^2 - 6x + 8 + 2x^2 - 6x + 1\, dx$$

$$= \int_0^{1.5} 4x^2 - 12x + 9\, dx \quad \left[4\cdot\frac{x^3}{3} - 12\cdot\frac{x^2}{2} + 9x\right]_0^{1.5}$$

$$\left[\frac{4x^3}{3} - 6x^2 + 9x\right]_0^{1.5} = \frac{4\cdot(1.5)^3}{3} - 6\cdot(1.5)^2 + 9(1.5)$$

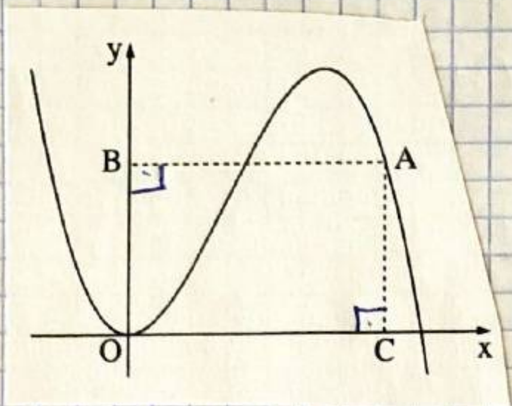
$$= \frac{4\cdot(1.5)^3}{3} - 6(1.5)^2 + 9(1.5) - [0] =$$

$$4.5 - 13.5 + 13.5 = 4.5$$

$$\boxed{S_{\text{المخطط}} = 4.5}$$

حل سؤال 6

أ. $f(x) = -x^3+2.75x^2$



النقطة A تقع على الدالة ولذلك احداثياتها هي الصورة:

$A(x, -x^3+2.75x^2)$

للنقطة C يوجد نفس الاحداثي x للنقطة A وبالتالي احداثياتها من الصورة $(x,0)$

للنقطة B يوجد نفس الاحداثي y للنقطة A وبالتالي احداثياتها من الصورة $B:(0, -x^3+2.75x^2)$

محيط المستطيل $= 2AB+2AC$

$AB = x_A - x_B = x-0$

$\boxed{AB = x}$

$AC = y_A - y_C$

$AC = -x^3+2.75x^2-0$

$\boxed{AC = -x^3+2.75x^2}$

محيط المستطيل $= 2\cdot AB+2AC = 2(x)+2(-x^3+2.75x^2)$

$= 2x-2x^3+5.5x^2 = \boxed{-2x^3+5.5x^2+2x}$

ب. دالة الهدف التي تعبر عن محيط المستطيل هي:

$g(x) = -2x^3+5.5x^2+2x$

$g'(x) = -6x^2+11x+2 \Longrightarrow g'(x)=0 \Longrightarrow -6x^2+11x+2=0$

نحل المعادلة: $-6x^2+11x+2=0$ $\boxed{a=-6 \,|\, b=11 \,|\, c=2}$

$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Longrightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \mp \sqrt{11^2-4\cdot(-6)\cdot 2}}{2\cdot(-6)}$

حسب الدستور $\Longrightarrow$

$$X_{1,2} = \frac{-11 \mp \sqrt{11^2 - 4(-6)\cdot 2}}{2(-6)} = \frac{-11 \mp \sqrt{121+48}}{-12}$$

$$X_{1,2} = \frac{-11 \mp \sqrt{169}}{-12} = \frac{-11 \mp 13}{-12}$$

$$X_1 = \frac{-11+13}{-12} = \frac{2}{-12} = \frac{1}{-6}$$

بما أن النقطة A تقع بالربع الأول
اذاً الاحداثي X لها موجب وبالتالي
هذا الحل غير ملائم.

$$X_2 = \frac{-11-13}{-12} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$\boxed{X=2}$$

ملائم

نبرهن ان $X=2$ هو מקסימום:

$$g'(x) = -6x^2 + 11x + 2$$

نبرهن بواسطه f'':

$$g''(x) = -12x + 11$$

$$g'(2) = -12\cdot 2 + 11 = -24 + 11 = -13 < 0$$

اذاً $X=2$ מקסימום.

2.ب محيط المستطيل هو $g(x)$

$$g(x) = -2x^3 + 5.5x^2 + 2x$$

$$g(2) = -2(2)^3 + 5.5\cdot 2^2 + 2\cdot 2$$

$$\underbrace{-2\cdot 8}_{-16} + \underbrace{5.5\cdot 4}_{22} + 4$$

$$-16 + 22 + 4 = 10$$

$$g(2) = 10$$

واكبر محيط ممكن للمستطيل هو 10.