حل نموذج بجروت

(806) 581

موعد صيف خاص

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

بحسب المعطيات نفهم أن :-

محمد وزاوية انطلقا بنفس اللحظة الواحد باتجاه الآخر والتقيا بعد ساعتين، نعبر عن هذه المعطيات بواسطة جدول

	سرعة	زمن	مسافة
محمد	V_A	2	$2V_A$
زاوية	V_B	2	$2V_B$

اذاً المسافة بين الطيبة وطمرة هي $2V_A+2V_B \rightarrow 2(V_A+V_B)$

كذلك معطى أن الزمن الذي يحتاجه محمد لقطع المسافة بين الطيبة وطمرة أكبر بـ 54 دقيقة من الزمن الذي تحتاجه زاوية لقطع المسافة اي يتحقق :-

$$\underbrace{\frac{2V_A+2V_B}{V_B}}_{\text{زمن زاوية لقطع المسافة}}+\frac{54}{60}=\underbrace{\frac{2V_A+2V_B}{V_A}}_{\text{زمن محمد لقطع المسافة}}$$

$$\Rightarrow \frac{2V_A}{V_B}+\cancel{2}+0.9=\cancel{2}+\frac{2V_B}{V_A}$$

نفرض $\frac{V_A}{V_B}=t$ اذاً :-

$$2t+0.9=2\cdot\frac{1}{t}$$

نضرب بـ $t \Rightarrow 2t^2+0.9t=2 \Rightarrow 2t^2+0.9t-2=0$

حصلنا على معادلة تربيعية نحلها ونحصل على:

$t_1=0.8=\frac{4}{5}$ $\qquad$ $t_2=-1.25$ ✗ غير ملائم

اذا النسبة بين سرعة محمد وسرعة زاوية هي: $\boxed{\frac{V_A}{V_B}=\frac{4}{5}}$

والنسبة بين سرعة زاوية وسرعة محمد

$$\boxed{\frac{V_B}{V_A}=\frac{5}{4}}$$

ب) المسافة بين طبريا والمطلة هي $2V_A+2V_B$

$\frac{V_A}{V_B}=\frac{4}{5} \Leftarrow \boxed{V_A=\frac{4}{5}V_B}$ أو $\boxed{V_B=\frac{5}{4}V_A}$

من هنا المسافة الكلية بدلالة V_A هي

$$2V_A+2\cdot\frac{5}{4}V_A = 2V_A+\frac{10}{4}V_A = 4.5\cdot V_A$$

اي أن أمجد يحتاج لـ 4.5 ساعة لقطع المسافة

أي: $60\cdot(4.5) \Rightarrow 270$ دقيقة

وبالتالي راوية تحتاج أقل 54 دقيقة أي 216 دقيقة

أو $\frac{216}{60}=3.6$ ساعة

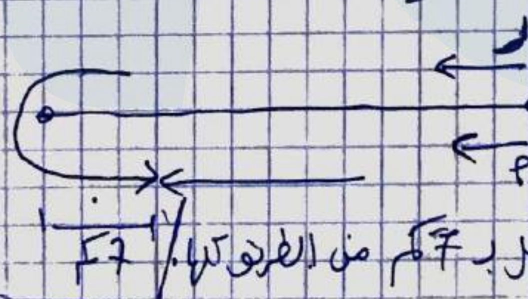
ادًا:

أمجد يحتاج لـ 4.5 ساعة لقطع المسافة

وراوية تحتاج 3.6 ساعة لقطع المسافة.

ج + د

في اليوم الثاني خرج الاثنان من طبريا باتجاه المطلة. راوية وصلت الى المطلة وعادت مباشرة والتقت بأمجد على بعد 7 كم من المطلة:



أي ان راوية قطعت مسافة مقدارها طول الطريق + 7كم

في حين ان أمجد قطع مسافة أقل بـ 7كم من الطريق كلها/

مسافة راوية = المسافة الكلية + 7 كم = $7+3.6V_B$

مسافة أمجد = $4.5V_A-7$

بما أن زمن السير نفسه لذلك يتحقق ان:

$$\frac{7+3.6V_B}{V_B}=\frac{4.5V_A-7}{V_A} \Rightarrow \frac{7}{V_B}+3.6=4.5-\frac{7}{V_A}$$

$$V_B=\frac{5}{4}V_A=1.25V_A$$

$$\frac{7}{1.25V_A} + 3.6 = 4.5 - \frac{7}{V_A} \Rightarrow \frac{7}{1.25V_A} + \frac{7}{V_A} = \overbrace{4.5 - 3.6}^{0.9}$$

نضرب المعادلة بـ $1.25V_A$ ونحصل على

$$7 + 8.75 = 1.125V_A \Rightarrow 15.75 = 1.125V_A$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{15.75}{1.125} \Rightarrow \boxed{V_A = 14}$$

وبالتالي سرعة راوية $V_B = \frac{5}{4} \cdot 14 = 17.5$

اذاً سرعة أحمد هي 14 كم/س

سرعة راوية هي 17.5 كم/س

المسافة بين المطلة وطبريا هي $4.5V_A \Leftarrow 4.5 \cdot 14 = 63$ كم

اذاً المسافة بين طبريا والمطلة هي 63 كم.

سؤال 2

1. بحسب المعطيات نفهم الامور التالية:

1. في المتواليه يوجد $2n+1$ حدود

2. المتوالية a_n حسابيه فرقها d

الحدود في الاماكن الفرديه هي $a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2n+1}$

وهذه الحدود عبارة عن متواليه حسابيه فرقها $2d$.

عدد الحدود في المتواليه هو $(n+1)$ حدود.

الحدود في الاماكن الزوجيه هي $a_2, a_4, \ldots a_{2n}$

عدد الحدود في هذه المتوالية هو n وهذه الحدود تشكل متواليه حسابيه فرقها $2d$ وحدها الاول هو a_2 $(a_2 = a_1 + d)$

مجموع الحدود التي في الاماكن الفرديه

$$S_{\text{حدود فرديه}} = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + [(n+1)-1]2d\right] = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + (n)2d\right]$$

$$\boxed{S_{\text{حدود فرديه}} = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + 2n \cdot d\right]} = \frac{n+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left[a_1 + nd\right]$$

$$\boxed{S_{\text{حدود فرديه}} = (n+1)\left[a_1 + nd\right]}$$

$$S_{\text{حدود زوجيه}} = \frac{n}{2}\left[2a_2 + (n-1)\cdot 2d\right] = \frac{n}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left[a_2 + (n-1)d\right]$$

$$= n\left[\overbrace{a_1 + \cancel{d}}^{(a_2)} + nd - \cancel{d}\right] = n\left[a_1 + nd\right]$$

$$\boxed{S_{\text{حدود زوجيه}} = n\left[a_1 + nd\right]}$$

نجد الفرق بين مجموع الحدود في الاماكن الفردية ومجموع الحدود في الاماكن الزوجية:

$$S_{\substack{\text{حدود}\\\text{فردية}}} - S_{\substack{\text{حدود}\\\text{زوجية}}} = (n+1)[a_1+nd] - (n(a_1+nd))$$

$$= (a_1+nd)[n+1-n] = (a_1+nd)\cdot 1$$

إذاً:

$$\boxed{S_{\substack{\text{حدود}\\\text{فردية}}} - S_{\substack{\text{حدود}\\\text{زوجية}}} = a_1+nd}$$

الحد الاوسط في المتوالية a_n هو الحد الذي بالترتيب $n+1$ اي a_{n+1} (قبله يوجد n حدود وبعده يوجد n حدود)

ويتحقق:

$$a_{n+1} = a_1 + [(n+1)-1]\cdot d = \boxed{a_1+nd}$$

اذاً:

$$S_{\substack{\text{حدود}\\\text{فردية}}} - S_{\substack{\text{حدود}\\\text{زوجية}}} = \underbrace{a_1+nd}_{\substack{\text{الحد الاوسط}\\\text{بالمتوالية}}} = a_{n+1}$$

وهو المطلوب.

ب. أول n حدود في المتوالية a_n هي الحدود $a_1, \ldots, a_n$

ذا فمجموعها هو:

$$S_{\substack{n\\\text{الاولى}}} = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

آخر n حدود في المتوالية a_n هي الحدود $a_{n+2} \ldots a_{2n+1}$

اي الحدود التي تبدأ بالحد a_{n+2} وتنتهي بالحد a_{2n+1}

ومجموعها هو

$$S_{\substack{\text{آخر } n \text{ حدود}}} = \underbrace{S_{2n+1}}_{\substack{\text{كل الحدود}\\(2n+1 \text{ حدود})}} - \underbrace{S_{n+1}}_{\substack{\text{اول } (n+1)\\\text{حدود}}}$$

$$S_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}\left[2a_1 + (2n+1-1)\cdot d\right]$$

$$\boxed{S_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}\left[2a_1 + 2nd\right]} = \boxed{(2n+1)(a_1+nd)}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + (n+1-1)\cdot d\right] = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + nd\right]$$

$$\boxed{S_{n+1} = \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + nd\right]}$$

نجد مجموع آخر n حدود

مجموع آخر n حدود $= S_{2n+1} - S_{n+1} =$

$$\frac{2n+1}{2}\left[2a_1 + 2nd\right] - \frac{n+1}{2}\left[2a_1 + nd\right]$$

$$(2n+1)\cdot a_1 + (2n+1)\cdot nd - \left[(n+1)\cdot a_1 + \frac{(n+1)nd}{2}\right]$$

$$a_1\left[(2n+1)-(n+1)\right] + d\left[(2n+1)\cdot n - \frac{(n+1)n}{2}\right]$$

$$a_1\cdot n \qquad + dn\left((2n+1) - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$a_1 n + dn\left[\left(2n+1 - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$a_1 n + dn\cdot\left[\frac{4n+2-n-1}{2}\right] = a_1 n + dn\left(\frac{3n+1}{2}\right)$$

مجموع آخر n حدود $= S_{2n+1} - S_{n+1} = \boxed{a_1\cdot n + dn\left(\frac{3n+1}{2}\right)}$

$T =$ مجموع آخر n حدود $-$ مجموع أول n حدود $= a_1\cdot n + dn\left(\frac{3n+1}{2}\right) - \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$

$$= \cancel{a_1 n} + \frac{3dn^2}{2} + \frac{dn}{2} - \cancel{na_1} + \frac{n^2\cdot d}{2} + \frac{nd}{2}$$

$$= \frac{4dn^2}{2} + \frac{2nd}{2} = \boxed{2dn^2 - nd}$$

حل بحسب المعطيات:

* مجموع كل حدود المتوالية = مجموع 2n الحدود الأخيرة

مجموع كل حدود المتوالية هو S_{2n+1}

مجموع ال 2n حدود الأخيرة هو مجموع كل الحدود ناقص ال a_1

أي هو $S_{2n+1}-a_1$, ويتحقق :-

$$S_{2n+1} = S_{2n+1} - a_1 \Longrightarrow \boxed{0 = a_1}$$

أي أن الحد الأول في المتوالية هو 0. $\boxed{a_1=0}$

* معلوم أيضاً أن $a_1+a_{2n+1}=204$ (مجموع الأول والأخير = 204)

$$\Longrightarrow a_1 + a_1 + (2n+1-1)d = 204$$

$$\Longrightarrow \underbrace{2a_1}_{0} + 2nd = 204$$

$$\boxed{n\cdot d = 102}$$

* كذلك معطى أن $T=3468$ أي يتحقق أن :-

$$T = \underbrace{a_1 n}_{0} + \underbrace{dn}_{102}\left(\frac{3n+1}{2}\right) - \frac{n}{2}\left(\underbrace{2a_1}_{0} + (n-1)d\right)$$

$$\Longrightarrow 102\left(\frac{3n+1}{2}\right) - \frac{n}{2}\left(\overset{102}{nd} - d\right) = 3468$$

$$51(3n+1) - 51n + \frac{\overset{102}{nd}}{2} = 3468$$

$$:51 \;/\; 51(3n+1) - 51n + 51 = 3468 \;/\; :51$$

$$3n+1 - n + 1 = 68$$

$$2n = 66 \Longrightarrow \boxed{n=33}$$

أي أن عدد حدود المتوالية هو $\overset{66}{2n}+1$ أي $\boxed{67 \text{ حد}}$

سؤال 3

بحسب المعطيات:-

الاحتمال لاختيار زهرتين بيضاء اللون أكبر 2.25 ضعف من احتمال لقطف زهرتين بنفسجيتين

نفرض أن الاحتمال لاختيار زهرة بيضاء هو P

اذاً الاحتمال لاختيار زهرتين بيضاء هو $P \cdot P \Leftarrow P^2$

وبالتالي الاحتمال لاختيار زهرتين بنفسجيتين هو $\frac{P^2}{2.25}$

ونتحقق من جهة أخرى:

بما ان احتمال اختيار زهرة بيضاء هو P اذاً احتمال اختيار زهرة بنفسجية هو $(1-P)$

وبالتالي الاحتمال لاختيار زهرتين بنفسجيتين هو $(1-P)^2$

اذاً نتحقق $(1-P)^2 = \frac{P^2}{2.25}$

$$\xrightarrow{\times 2.25} 1-2P+P^2 = \frac{P^2}{2.25} \Longrightarrow 2.25 - 4.5P + 2.25P^2 = P^2$$

$$\Longrightarrow 1.25P^2 - 4.5P + 2.25 = 0$$

نحلها نحصل على:

$\cancel{P_1 = 3}$ أو $\boxed{P = 0.6}$

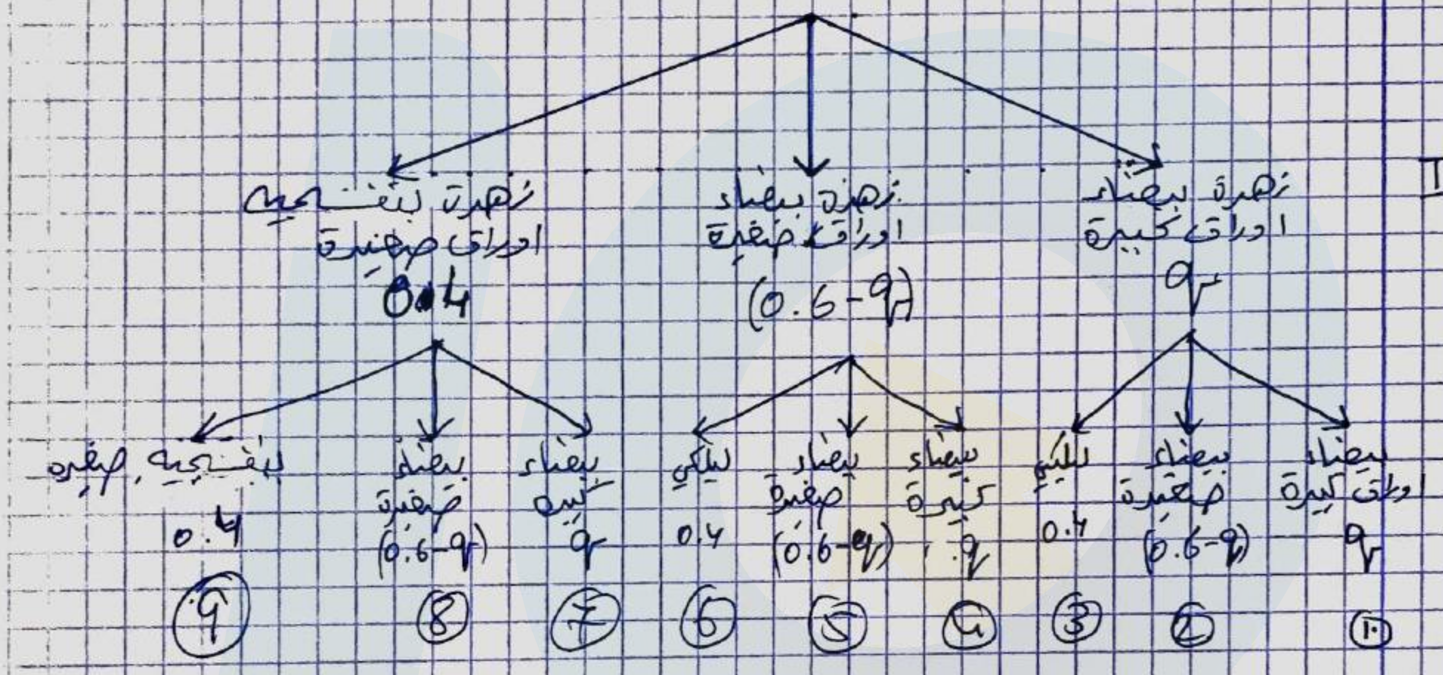
غير ملائم $0 \le P \le 1$

اذاً احتمال اختيار زهرة بيضاء هو 0.6 أي أن نسبة الازهار البيضاء هي $\boxed{60\%}$ والبنفسجية هي $\boxed{40\%}$

ب. بحسب المعطيات الجزء من الازهار البيضاء يوجد اوراق كبيرة وفقط لهم أي انه للازهار البنفسجية بالضرورة لا يوجد اوراق كبيرة (أي أن اوراقهم صغيرة)

نفرض ان احتمال اختيار زهرة بيضاء مع اوراقه كبيرة هو q
اذاً احتمال اختيار زهرة بيضاء مع اوراقه صغيرة هو $0.6-q$

نبني شجرة ملائمة تعبر عن الأوضاع الممكنة $(0<q<0.6)$



بحسب المعطى الاحتمال أن نختار بالترتيب زهرتين: واحدة اوراقها صغيرة والاخرى اوراقها كبيرة هو 0.455.

التفرعات التي تلائم هذه الحالة هي ② أو ③ أو ④ أو ⑦

$$P(2) = P\left(\begin{matrix}\text{بيضاء كبيرة}\\ \text{بيضاء صغيرة}\end{matrix}\right) = q(0.6-q)$$

وايضًا التفرع ④ له نفس الاحتمال.

$$P(4) = q(0.6-q)$$

تفرع ③

$$P(3) = P\left(\begin{matrix}\text{بيضاء كبيرة}\\ \text{بنفسجية}\end{matrix}\right) = 0.4\cdot q$$

وتفرع ⑦ له نفس الاحتمال

$$P(7) = \left(\begin{matrix}\text{بنفسجية}\\ \text{بيضاء كبيرة}\end{matrix}\right) = 0.4q$$

ويتحقق:

$$q(0.6-q)\cdot 2 + 0.4q\cdot 2 = 0.455$$

$1.2q - 2q^2 + 0.8q = 0.455$

$\Longrightarrow 2q^2 - 2q + 0.455 = 0$

نحل المعادلة التربيعية ونحصل على:

$q_1 = 0.35$ $\qquad \times\ q_2 = 0.65$

غير ملائم لأن $0 < q < 0.6$

إذاً احتمال اختيار زهرة بيضاء أوراقها كبيرة هو $\boxed{0.35}$

وبالتالي احتمال اختيار زهرة بيضاء أوراقها صغيرة هو $\boxed{0.25}$
$(0.6 - 0.35)$

ب 2. الاحتمال المطلوب هو احتمال مشروط:

$$P\left(\text{اختيار زهرة بنفسجية} \middle| \text{زهرة واحدة فقط أوراقها كبيرة (بيضاء كبيرة)}\right) = \frac{P\left(\text{زهرة بنفسجية} \cap \text{زهرة أوراقها كبيرة واحدة}\right)}{P\left(\text{واحدة أوراق كبيرة}\right)}$$

الوضع الذي فيه نختار زهرتين واحدة أوراقها كبيرة وزهرة بنفسجية هو الفرع 3 أو 7 لأنه فقط بهاذين الفرعين نحصل على زهرة بنفسجية (التي أوراقها صغيرة دائماً) وزهرة أوراقها كبيرة (بيضاء)

إذاً:

$$P\left(\text{بنفسجية} \cap \text{أوراق كبيرة}\right) = P(3) + P(7)$$

$$P(3) = 0.4q = 0.4 \cdot 0.35 = 0.14$$

$$P(7) = q \cdot 0.4 = 0.35 \cdot 0.4 = 0.14$$

$$0.14 + 0.14 = 0.28$$

$$P\left(\text{زهرة بنفسجية} \cap \text{زهرة واحدة أوراقها كبيرة}\right) = \frac{0.28}{0.455} = \boxed{0.615} = \boxed{\frac{8}{13}}$$

إذاً

ب- بحسب المعطيات ضمة الازهار التي اختارتها تحوي 7 زهرات بيضاء.

الاحتمال ان تحوي الضمة زهرة واحدة على الاقل اوراقها كبيرة وايضاً على الاقل زهرة واحدة اوراقها صغيرة هو

$$1-P\left(\text{الضمة لا تحوي اي زهرة اوراقها كبيرة}\right)-P\left(\text{الضمة لا تحوي اي زهرة اوراقها صغيرة}\right)$$

بما انه معلوم ان كل الازهار في الضمة بيضاء

لذلك

$$P\left(\text{زهرة اوراقها كبيرة} \;\middle|\; \text{زهرة بيضاء}\right)=\frac{P\left(\text{اوراق كبيرة} \cap \text{زهرة بيضاء}\right)}{P\left(\text{زهرة بيضاء}\right)}$$

$$=\frac{0.35}{0.6}=0.5833=\frac{7}{12}$$

$$P\left(\text{زهرة اوراقها صغيرة} \;\middle|\; \text{زهرة بيضاء}\right)=\frac{P\left(\text{اوراق صغيرة} \cap \text{زهرة بيضاء}\right)}{P\left(\text{بيضاء}\right)}=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

وبالتالي الاحتمال المطلوب هو

$$1-\left(\frac{5}{12}\right)^{7}-\left(\frac{7}{12}\right)^{7}=\boxed{0.974}$$

سؤال 4

بحسب المعطيات :-

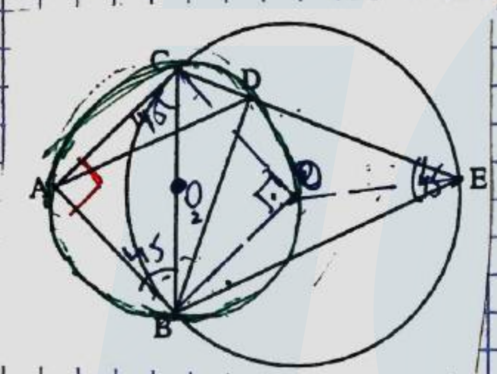
AC و AB مماسان للدائرة يخرجان من النقطة A

$\measuredangle CAB = 90°$

CE و BE وتران بالدائرة

D هي نقطة تقاطع الدائرة التي تحصر المثلث ABC مع الوتر CE.

أ.



في المثلث ABC AB=AC

لأن طول المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة الى نقطة التماس متساوي

① اذاً يتحقق $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC = 45°$

$\left(\frac{90}{2}\right)$

② $\measuredangle E = \measuredangle ACB = 45°$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر تساوي الزاوية المحيطية المقابلة لنفس الوتر

في الدائرة التي تحصر المثلث ABC يتحقق :-

③ $\measuredangle A = 90°$ محيطية وبالتالي CB القطر في الدائرة

ليكن O مركز الدائرة. نرسم انصاف الاقطار OB و OC و OE

$\measuredangle COB = 2 \cdot \measuredangle CEB$ زاوية مركزية ضعف المحيطية المقابلة لنفس الوتر

④ $\boxed{\measuredangle COB = 90°}$

الشكل الرباعي ACOB هو شكل رباعي فيه $\measuredangle O = 90°$ وهي مقابلة لقطر الدائرة الحاصرة للمثلث ABC ولذلك فهي تقع على الدائرة الحاصرة للمثلث ABC (انظر الرسم)

في هذه الدائرة (التي مركزها في منتصف CB) تتحقق ايضاً

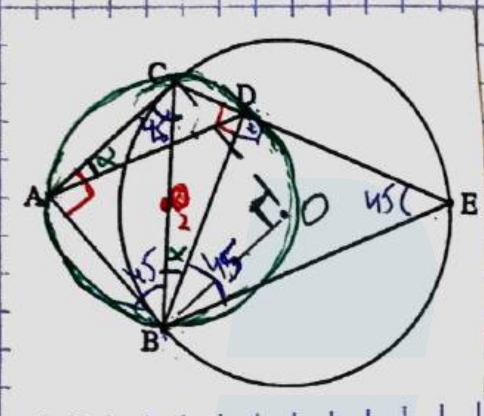
(5) ABDC محصور داخل نفس الدائرة O_2 ولذلك

مجموع الزاويتين المتقابلتين 180

$\angle CDB = 180^\circ - \angle A \Rightarrow \angle CDB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

اذن $\boxed{\angle CDB = 90}$

(6) وبالتالي $\angle BDE = 90$ (زاوية مكملة لـ $\angle CDB$)



(7) في المثلث BDE

$\angle DBE = 180 - 90 - 45 = 45$

اذن $\angle DBE = \angle DEB = 45^\circ$

والمثلث متساوي الساقين $DB = DE$

وهو المطلوب (أ)

ب) في الدائرة O_2 (التي تحصر ABDC و ACDB)

(8) $\angle ACB = \angle ADB = 45$ محيطيتان تقابلان نفس الوتر AB.

(9) $\angle CBD = \angle CAD = \alpha$ محيطيتان تقابلان نفس الوتر CD

وبالتالي $\angle CBE = \angle ABD = 45 + \alpha$

(10) اذن: $\triangle ADB \sim \triangle CEB$ (حسب ز، ز)

$\angle ABD = CBE = 45 + \alpha$ (حسب 9)

$\angle ADB = \angle E = 45^\circ$ (حسب (7) و (2))

وهو المطلوب (ب)

ج- في $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين، نفرض $AB = AC = a$

اذا حسب فيثاغورس يتحقق $a^2 + a^2 = BC^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{2}a = BC}$

وبالتالي $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

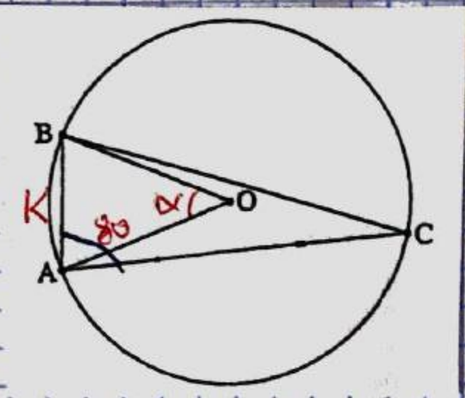
وبما ان $\triangle ABD \sim CEB$ اذا النسبة بين المساحتين هي تربيع النسبة بين الأضلاع المتناظرة ويتحقق:

$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CEB}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CEB}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2 S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CED}}$ وهو المطلوب (ج)

حل سؤال 5

بحسب المعطيات $AB=K$

$\measuredangle BAC=80^\circ \,,\ \measuredangle AOB=\alpha$



أ. في ΔBOA:

$OB=OA=R$

بحسب قانون ال cos يتحقق:

$$K^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cdot\cos\alpha$$

$$K^2=2R^2-2R^2\cdot\cos\alpha$$

$$2R^2\cos\alpha=2R^2-K^2$$

$$\cos\alpha=\frac{2R^2}{2R^2}-\frac{K^2}{2R^2}=1-\frac{K^2}{2R^2}$$

$$\boxed{\cos\alpha=1-\frac{K^2}{2R^2}}$$ وهو المطلوب

ب. معطى أنّ $K=\frac{3}{4}R$

بما أنّ $\cos\alpha=1-\frac{K^2}{2R^2}$ إذن نعوض $K=\frac{3}{4}R$ نحصل على:

$$\cos\alpha=1-\frac{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}{2R^2}=1-\frac{\frac{9}{16}\cancel{R^2}}{2\cancel{R^2}}=1-\frac{9}{32}=\frac{23}{32}$$

$$\cos\alpha=\frac{23}{32}\longrightarrow\boxed{\alpha=44.048}$$

مساحة المثلث ABC هي $= S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin80}{2}$

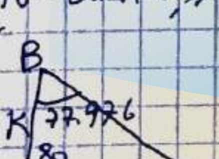
$\boxed{AB=K=\frac{3}{4}R}$

كذلك, $\measuredangle C=\frac{\measuredangle O}{2}$ ⇐ محيطية ومركزية تقابل AB

إن $\measuredangle C=\frac{44.048}{2}$ ⇐ $\boxed{\measuredangle C=22.024}$ ⇐ $\boxed{\measuredangle ABC=77.976}$

(مجموع زوايا المثلث 180)

بحسب قانون ال sin في ΔABC:



$$\frac{AC}{\sin77.976}=2R\Rightarrow\boxed{AC=2R\cdot\sin77.976}$$

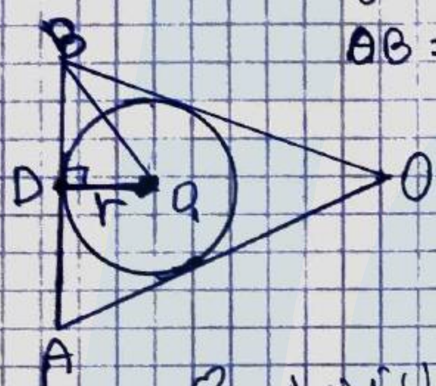
:إذاً

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 80}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} R \cdot 2R \cdot \sin(77.976) \cdot \sin 80$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4} R^2 \cdot \sin(77.976) \cdot (\sin 80) = \boxed{0.722 R^2}}$$

R - r موضع قطر الدائرة المحصورة داخل المثلث AOB



المثلث AOB متساوي الساقين $OB = OA = R$

$$\measuredangle O = \alpha = 44.048$$

$$\measuredangle A = \measuredangle B = \frac{180 - 44.048}{2}$$

$$\measuredangle A = \measuredangle B = 67.976$$

نرمز لمركز الدائرة المحصورة داخل المثلث ب O_1

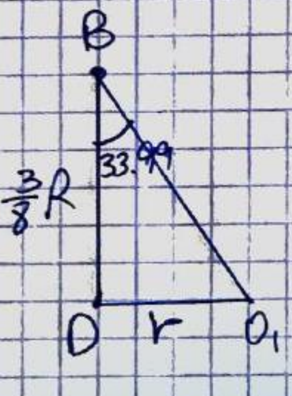
لتكن D نقطة التماس للدائرة O_1 مع المماس AB ، $O_1D = r$

$\measuredangle D = 90°$ المماس عمودياً على نصف القطر

O_1B ينصف $\measuredangle ABO$ ولذلك $\measuredangle DBO = \frac{67.976}{2}$

$$\Rightarrow \measuredangle DBO = 33.99$$

في المثلث O_1DB نتحقق:



$$BD = \frac{K}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} R = \frac{3}{8} R$$

$$\boxed{BD = \frac{3}{8} R}$$

:إذاً

$$tg\, 33.99 = \frac{r}{\frac{3}{8} R}$$

$$\Rightarrow 0.674 = \frac{r}{0.375 R} \Rightarrow 0.674 \cdot 0.375 = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow 0.25275 = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{0.25275} = \boxed{3.956}$$

سؤال 6

1. أ

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$$

مجال تعريف الدالة يجب أن تحقق شرطين: -

(I) $1-2x \geq 0$ دائماً (II) $x^2-x \neq 0$

$1 \geq 2x$ $x(x-1)\neq 0$

$\frac{1}{2} \geq x$ وأيضاً $x\neq 0$ أو $x\neq 1$

إذاً مجال تعريف الدالة: -

$x \leq \frac{1}{2}$, $x\neq 0$

ويمكن كتابته كالتالي:

$0 < x \leq \frac{1}{2}$ أو $x<0$

2. تقاطع مع المحاور:

بما أن الدالة غير معرفة في $x=0$ إذاً لا يوجد تقاطع مع المحور y.

تقاطع مع المحور x: $y=0 \Leftarrow$

$()^2$ $0=\sqrt{1-2x}$

$0=1-2x \xrightarrow{()^2} \boxed{x=\frac{1}{2}}$ $(\frac{1}{2},0)$

3. خطوط التقارب

* أفقية $y=0$: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

* عمودية $x=0$ (اللغموض في $x=0$).

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (x^2 - x) - (2x-1)\sqrt{1-2x}}{(x^2-x)^2}$$

نضرب المشتقة بـ $\frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}} = 1$ وبهذا لن نغير من صفاتها ونحصل على:

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - x) - (2x-1)(1-2x)}{\sqrt{1-2x}\,(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x - (-4x^2 + 2x + 2x - 1)}{\sqrt{1-2x}\,(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x + 4x^2 - 4x + 1}{\sqrt{1-2x}\,(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1-2x}\,(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

نحل المعادلة التربيعية الناتجة ونحصل على $\varnothing$ $(\Delta < 0)$

أي لا يوجد نقطة صفرية للمشتقة وبالتالي الدالة اما تصاعدية او تنازلية في كل جزء من مجال تعريفها

نفحص المجالات بواسطة المشتقة:

في المجال $x < 0$ نختار $x = -1$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 3(-1) + 1$

$f'(-1) = 3 - 3 + 1 = 1 > 0$

ملاحظة: نفحص فقط اشارة البسط لأن المقام دائماً موجب

اذاً $x < 0$ تصاعدي

في المجال $0 < x \le \frac{1}{2}$ نختار $x = \frac{1}{4}$

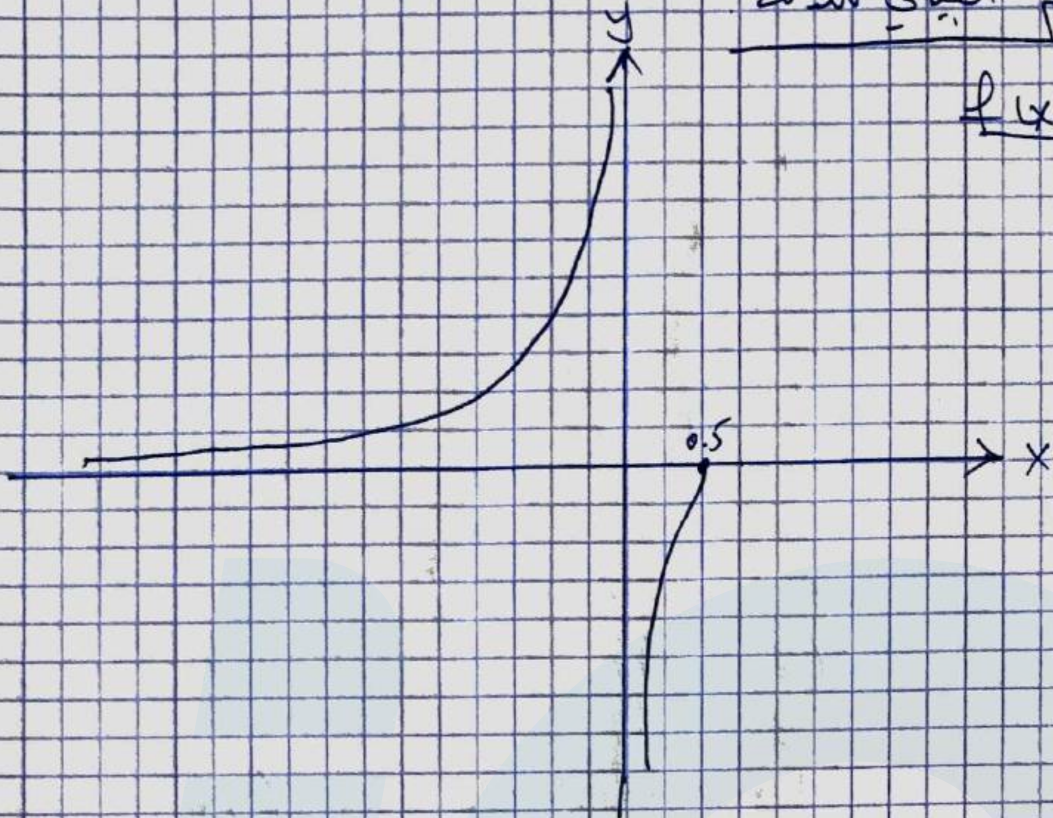
$f'(\frac{1}{4}) = 3(\frac{1}{4})^2 - 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{16} - \frac{3}{4} + 1 > 0$

اذاً $0 < x \le \frac{1}{2}$ تصاعدي

وللتلخيص الدالة $f(x)$ تصاعدية في كل مجال تعريفها

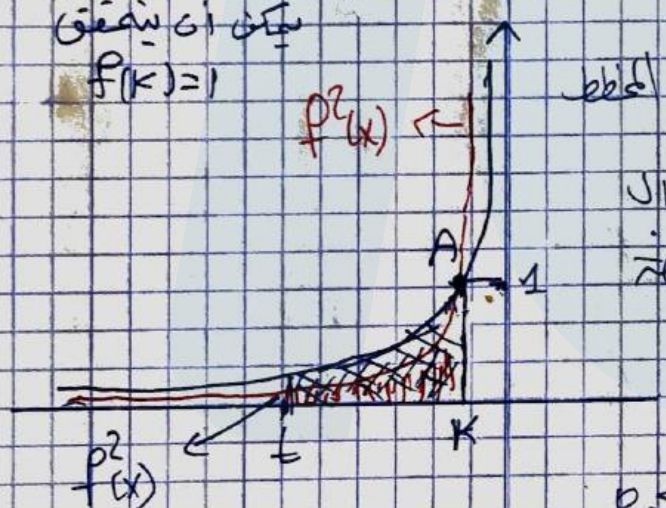
المجال التصاعدي $\boxed{x < 0 \text{ أو } 0 < x \le \frac{1}{2}}$

ب- الرسم البياني للدالة:
$f(x)$



ج- حسب المعطيات $f(K)=1$ ، لذلك $K<0$ لانه فقط في المجال $X<0$ يمكن ان يتحقق $f(K)=1$

التكامل المطلوب: $\int_t^K f(x)dx$ عبارة عن الجزء المخطط



بما ان الدالة موجبه في هذا المجال

لذلك التكامل عبارة عن المساحة المخططه

قيم الدالة في المجال $t \le x \le k$

أصغر من 1 اي أن $0 \le f(x) < 1$

وبالتالي يتحقق ان $f^2(x) < f(x)$ لكل $t \le X \le k$ (انظر رسم $f^2(x)$)

اي ان المساحة المحصورة بين الدالة $f^2(x)$ في المجال $t \le X \le k$

اقل من المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور X في المجال $t \le x \le k$

(انظر الرسم $f^2(x)$ هي الرسم المتقطع بالأحمر).

ويتحقق
$$\underbrace{\int_t^K f^2(x)\,dx}_{\text{المخطط بالأحمر}} < \underbrace{\int_t^K f(x)\,dx}_{\text{المخطط}}$$

د. المساحة المحصورة بين الدالة $f^2(x)$ والمحور x

والمستقيمات $x=-8$ و $x=-1$ هي

$$\int_{-8}^{-1} f^2(x)\,dx = \int_{-8}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}\right)^2 dx$$

$$\int_{-8}^{-1} \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}\,dx$$

نفرض أن $g(x)=x^2-x$ إذاً $g'(x)=2x-1$ وبالتالي التكامل يمكن

أن نكتبه كالتالي

$$\int_{-8}^{-1} \frac{\overset{-1(2x-1)}{\cancel{1-2x}}}{(x^2-x)^2}\,dx = \int_{-8}^{-1} \frac{-g'(x)}{g^2(x)}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{g(x)}\right]_{-8}^{-1} = \left[\frac{1}{x^2-x}\right]_{-8}^{-1} = \frac{1}{(-1)^2-(-1)} - \frac{1}{(-8)^2-(-8)}$$

$$= \frac{1}{1+1} - \frac{1}{64+8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{36}{72} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}$$

ج:

$$\boxed{\int_{-8}^{-1} f^2(x)\,dx = \frac{35}{72} \text{ وحدة مساحة}}$$

سؤال 7

أ. $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$ $\quad m \neq 0$

بحسب المعطى ميل المماس للدالة f في $x = \frac{\pi}{4}$ هو -2

اي يتحقق: $f'(\frac{\pi}{4}) = -2$

$f'(x) = m\cdot(-\sin(mx)) + 2\cdot(-\sin(2x))$

$$\boxed{f'(x) = -m\,\sin mx - 2\sin 2x}$$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -m\cdot\sin m\frac{\pi}{4} - 2\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} = -2$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -m\sin\frac{m\pi}{4} - 2\overbrace{\sin 90}^{1} = -2$

$-m\sin\frac{m\pi}{4} \cancel{-2} = \cancel{-2}$

$-m\sin m\frac{\pi}{4} = 0$

$-m \neq 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cdot m = 0$

$\frac{m\cancel{\pi}}{4} = \cancel{\pi}K$

K عدد صحيح

$\Rightarrow \frac{m}{4} = K \Rightarrow \boxed{m = 4K}$

اي ان m عدد صحيح من مضاعفات العدد 4

$\boxed{\text{د هو المطلوب}}$

ب.1 نعوض $m=4$ اذا:

$f(x) = \cos 4x + \cos 2x$

$\boxed{0 \leq x \leq \pi}$

$f'(x) = -4\sin 4x - 2\sin 2x$

تقاطع مع المحاور:

(مع y) $(x=0)$

$f(0) = \cos 4\cdot 0 + \cos 2\cdot 0$

$f(0) = \cos 0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \Longrightarrow (0,2)$

نقاط تقاطع مع $x \Leftarrow y=0$

$0 = \cos 4x + \cos 2x \Rightarrow 0 = \cos 2\cdot 2x + \cos 2x$

$\Rightarrow 0 = 2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x$

$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

وهذه معادلة تربيعية، نفرض $\cos 2x = t$ $\quad -1 \le t \le 1$

وعندها يمكن كتابة المعادلة كالتالي:

$2t^2 + t - 1 = 0$

نحلها نحصل على:

$\boxed{t_1 = \frac{1}{2}}$ $\quad$ $\boxed{t_2 = -1}$

إذن: $\boxed{\cos 2x = \frac{1}{2}}$ أو $\boxed{\cos 2x = -1}$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ أو $2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ أو $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$

$k=1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6}} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6} > \pi$

$k=0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ (خارج المجال) $\rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

$2x = \pi + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k=0$ $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

أو $2x = -\pi + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ خارج المجال

$$\boxed{\text{إذن التقاطع مع } x: \quad \left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \quad \left(\frac{5\pi}{6}, 0\right) \quad \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$$

ب. 2 النقاط القصوى

$f'(x) = -4\sin 4x - 2\sin 2x$

$f'(x) = -4\cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x$

$f'(x) = -2\sin 2x(4\cos 2x + 1)$ $\quad f'(x) = 0$

$\Rightarrow -2\sin 2x = 0$ أو $4\cos 2x + 1 = 0$

$-2\sin 2x=0$ أو $4\cos 2x=-1$

$\sin 2x=0$

$2x=\pi k$

$x=\frac{\pi k}{2}$

$k=0 \to \boxed{x=0}$

$k=1 \to \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$k=2 \to \boxed{x=\pi}$

$\cos 2x=-\frac{1}{4}$

$2x=0.58\pi+2\pi k$ $\quad$ $2x=-0.58\pi+2\pi k$

$x=0.29\pi+\pi k$ أو $x=-0.29\pi+\pi k$

$\boxed{k=0} \to \boxed{x=0.29\pi}$ أو $x=-0.29\pi$ خارج المجال

$\boxed{k=1} \to x=1.29\pi$ خارج المجال أو $x=-0.29\pi+\pi$

$\boxed{x=0.71\pi}$

اذًا هنالك 5 نقاط شك وهي

$x=0$ // $x=0.29\pi$ // $x=0.71\pi$ // $x=\frac{\pi}{2}$ // $x=\pi$

لكي نصنف النقاط نجد المشتقة الثانية ونعوض نقاط الشك:

$f'(x)=-4\sin 4x-2\sin 2x$

$f''(x)=-16\cos 4x-4\cos 2x$

$x=0$ $\quad f''(x)=-16\cos 0-4\cos 0<0$ $\quad \boxed{(0,2) \text{ מקס'}}$

$x=0.29\pi \Rightarrow f''(0.29\pi)=-16\cos 4(0.29\pi)-4\cos(0.29\pi)>0$

$x=0.29\pi$ מינימום

$f(0.29\pi)=\cos 4(0.29\pi)+\cos 2(0.29\pi)=-1.125$

$\boxed{(0.29\pi,-1.125) \text{ מינימום}}$

$f''(\frac{\pi}{2})=-16\cdot\cos 4\frac{\pi}{2}-4\cos 2(\frac{\pi}{2})$

$f''(\frac{\pi}{2})=-12<0 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ מקסימום

$f(\frac{\pi}{2})=\cos 4(\frac{\pi}{2})+\cos 2(\frac{\pi}{2})=0$ $\quad \boxed{(\frac{\pi}{2},0) \text{ מקס'}}$

$f''(0.79\pi) = -16\cdot\cos 4(0.79\pi) - 4\cos(2\cdot 0.79\pi)$

$f''(0.79\pi) > 0 \Rightarrow x = 0.79\pi$
מינימום

$f(0.79\pi) = \cos 4(0.79\pi) - \cos 2(0.79\pi)$

$f(0.79) = -1.125$

$\boxed{\text{اذن } (0.79\pi, -1.125) \text{ מינימום}}$

والنقطة $\boxed{(\pi, 2)}$ מקסימום קצה

<u>التلخيص</u>

נקודות מקס' $(\pi, 2)$ $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 2)$

נקודות מינימום $(\underbrace{0.29\pi}_{0.91\ rad}, -1.125)$

$(\underbrace{0.79\pi}_{2.23\ rad}, -1.125)$

ه) الدالة $f(x)$ هي دالة زوجية (نبرهن انها زوجية)

$f(-x) = \cos(-4x) + \cos(-2x) = \cos 4x + \cos 2x = f(x)$

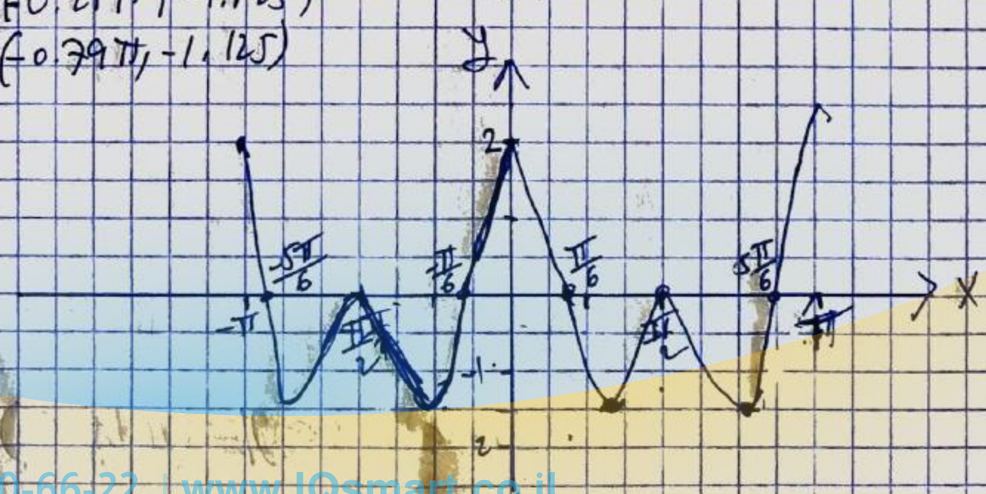
اذن $f(-x) = f(x)$

وبالتالي في المجال $-\pi \le x \le 0$ سنحصل على النقاط القصوى التالية :-

מקסימום $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ $(-\pi, 2)$

מינימום $(-0.21\pi, -1.125)$

$(-0.79\pi, -1.125)$



(د) بحسب المعطيات

$K(0)=0$ و $K'(x)=f(x)$ اي ان الدالة f هي مشتقة K

بما ان $f(x)$ زوجية اذاً $K'(x)$ زوجية ومنها $K(x)$ فردية

لان مشتقة الدالة الفردية هي دالة زوجية والعكس صحيح

• بما أن $f(x)$ هي مشتقة الدالة $K(x)$ لذلك :

المجالات الموجبة لـ $f(x)$ هي المجالات التصاعدية لـ $K(x)$

اي ان $K(x)$ تصاعدية في المجالات

$-\pi \le x < -\frac{5\pi}{6}$ أو $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6} < x \le \pi$

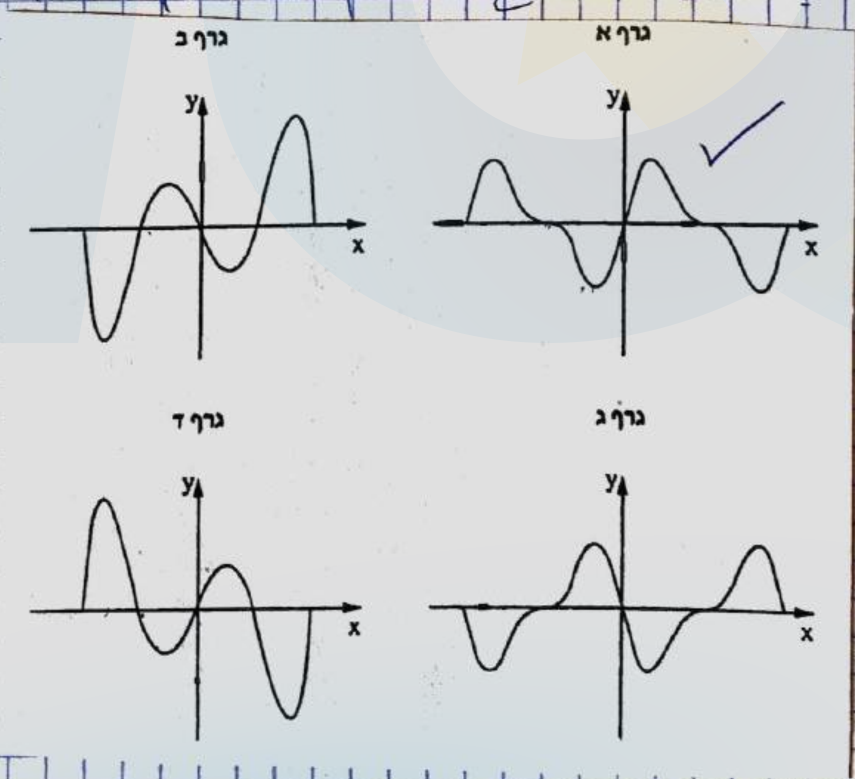
والمجالات السالبة لـ $f(x)$ هي المجالات التنازلية لـ $K(x)$

وبحسب رسم f المجالات التنازلية لـ $K(x)$ هي:

$-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

او $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$.

وبحسب هذه النتائج الرسم الملائم للدالة $K(x)$ هو (א)



سؤال 8

$f(x)=\frac{x-1}{x-3}$, $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$ ⇐ نلاحظ أنّ $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ.

مجالات التعريف

مجال تعريف $f(x)$

$x-3\neq0$

$\boxed{x\neq3}$

مجال تعريف $g(x)$

$x-1\neq0$

$\boxed{x\neq1}$

تقاطع مع المحاور

$f(x)$

مع y ← $x=0$

$f(0)=\frac{0-1}{0-3}=\frac{1}{3}$

$(0,\frac{1}{3})$ مع y

مع x ← $y=0$

$0=\frac{x-1}{x-3}$

$0=x-1$

$\boxed{1=x}$

$(1,0)$

$g(x)$

$g(0)=\frac{0-3}{0-1}=3$

$(0,3)$ مع y

$0=\frac{x-3}{x-1} \Rightarrow x-3=0$

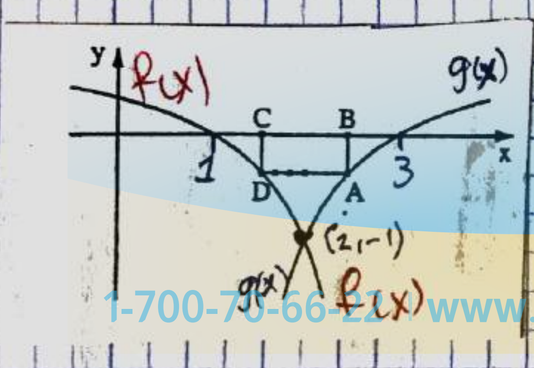
$\boxed{x=3}$

$(3,0)$

* تقاطع مع المحاور ل f: $(1,0)$ $(0,\frac{1}{3})$

* تقاطع مع المحاور ل g: $(3,0)$ $(0,3)$

ب.



لحساب نقاط التقاطع مع المحور x نستنتج أنّ $g(x)$ هو الرسم الذي يقطع المحور x بنقطة التي الإحداثي x لها أكبر من نقطة تقاطع f مع المحور x. وبالتالي إحداثيات A هي $A(2,g(2))$

نقطة تقاطع الدالتين تتحقق $g(x)=f(x)$ أو $g(x)=\frac{1}{g(x)}$

$\leftarrow$ $g^2(x)=1$ وبما أن نقطة التقاطع تربط الصادي y سالب

لذلك يتحقق $g(x)=-1$ أي:

$$\frac{x-3}{x-1}=-1 \Rightarrow x-3=1-x \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

اذاً نقطة تقاطع الدالتين هي $(2,-1)$

وبالتالي $2<t<3$

ب. احداثيات النقطة B هي $B:(t,0)$

احداثيات النقطة A هي $A:(t,g(t))$

$$g(t)=\frac{t-3}{t-1} \longrightarrow A\left(t,\frac{t-3}{t-1}\right)$$

وبالتالي:

$$AB=y_B-y_A=0-\frac{t-3}{t-1}$$

$$AB=-\frac{t-3}{t-1}=\frac{3-t}{t-1} \Rightarrow \boxed{AB=\frac{3-t}{t-1}}$$

ج.2 للنقطة A وللنقطة D يوجد نفس الصادي y

النقطة D تقع على الدالة $f(x)$, لتكن $D:(x_D,y_D)$

اذ $D\left(x_D,\frac{t-3}{t-1}\right)$ اذاً يتحقق:

$$f(x_D)=\frac{x_D-1}{x_D-3}=\frac{t-3}{t-1} \Rightarrow (x_D-1)(t-1)=(x_D-3)(t-3)$$

$$\Rightarrow \cancel{x_Dt}-t-x_D+1=\cancel{x_Dt}-3t-3x_D+9$$

$$\Rightarrow -x_D+3x_D=-3t+t+9-1 \Rightarrow 2x_D=-2t+8$$

$$\Rightarrow \boxed{x_D=4-t}$$

3.ج) مساحة المستطيل ABCD هي $AB \cdot AD$

$$AD = x_A - x_D = t - (4-t) = 2t-4$$

$$AB = \frac{3-t}{t-1}$$

$$S_{ABCD} = (2t-4)\left(\frac{3-t}{t-1}\right) = \frac{6t-12-2t^2+4t}{t-1} = \frac{-2t^2+10t-12}{t-1}$$

الدالة التي تعبر عن مساحة المستطيل

$$S(t) = \frac{-2t^2+10t-12}{t-1} \qquad 2 \leq t \leq 3$$

د)

$$S'(t) = \frac{(-4t+10)(t-1) - 1(-2t^2+10t-12)}{(t-1)^2}$$

$$S'(t) = \frac{-4t^2+10t+4t-10+2t^2-10t+12}{(t-1)^2}$$

$$S'(t) = \frac{-2t^2+4t+2}{(t-1)^2}$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -2t^2+4t+2 = 0$$

نحل المعادلة التربيعية ونحصل على

$t_1 = 2.414$ // $t_2 = -0.414$ X خارج المجال

اذاً: $t = 2.414$ ونبرهن ان $t = 2.414$ هي מקסימום بواسطة المشتقة الثانية.

بما ان المقام موجب في $S'(t)$ اذاً اشارة $S'(t)$ في $t=2.414$ تكون حسب اشارة مشتقة البسط في النقطة القصوى.

$$S''(t) = -4t+4 \Rightarrow S''(2.414) = -4(2.414)+4 < 0$$

البسط

لذلك $t = 2.414$ هي نقطة מקסימום وتعطينا اكبر مساحة