حل نموذج بجروت

(805) 482

موعد صيف خاص

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الأول :

$a_7 = -96 \quad , \quad a_4 = 12$

(أ) بما أن المتوالية هندسية إذاً يتحقق : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

من هنا :

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 12 \quad (\mathrm{I})$$

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = -96 \quad (\mathrm{II})$$

نقسم المعادلتين :

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{\cancel{a_1} \cdot q^6}{\cancel{a_1} \cdot q^3} = \frac{-96}{12} \Rightarrow q^3 = -8$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{q^3} = \sqrt[3]{-8}$$

$$\boxed{q = -2}$$

ثم نعوض $q=-2$ في احدى المعادلتين (I أو II) ونجد a_1 :

$$a_4 = 12 = a_1 \cdot \overset{-8}{(-2)^3}$$

$$a_1 = \frac{12}{-8} = -1.5$$

$$\boxed{a_1 = -1.5}$$

(ب) الحدود في الاماكن الزوجية تشكل متوالية جديدة :

حدها الاول : $A_1 = a_2 = a_1 \cdot q$

$$A_1 = (-1.5)(-2) = 3$$

أساسها : $Q = q^2 = 4$

نفرض حدود هذه المتوالية : n_1

من هنا : $S_{n_1} = \frac{A_1(Q^{n_1}-1)}{Q-1}$

$$262{,}143 = \frac{3(4^{n_1}-1)}{\underbrace{4-1}_{3}}$$

$$262{,}144 = 4^{n_1}$$

$$\boxed{n_1 = 9}$$

عدد الحدود في المتوالية الجديدة هو 9، وبما ان هذه المتوالية
هي عبارة عن الحدود الموجودة في الاماكن الزوجية للمتوالية a_n
وفي a_n يوجد عدد زوجي من الحدود اذًا عدد الحدود في المتوالية a_n:

$$2n_1 = 2\cdot 9 = \boxed{18}$$ حد

(ب) $b_7 = a_6$, $b_1 = a_3$

① بما ان المتوالية حسابية اذًا: $b_7 = b_1 + 6d$

[من القانون: $b_n = b_1 + d(n-1)$].

$$b_7 = a_6 = a_3 + 6d$$

$$a_6 - a_3 = 6d$$

$$a_1 \cdot q^5 - a_1 \cdot q^2 = 6d$$

$$\overset{-1.5}{a_1}\left(\overset{-32}{(-2)^5} - \overset{4}{(-2)^2}\right) = 6d$$

$$(-1.5)(-36) = 6d$$

$$(-6)(-1.5) = d$$

$$\boxed{d = 9}$$

② $b_n + b_{n+1} = 357$

نجد b_1: $b_1 = a_3 = a_1 \cdot q^2$

$$b_1 = (-1.5)(4) = \underline{\underline{-6}}$$

$$b_n = \overset{-6}{b_1} + 9(n-1) = -6+9n-9$$

$$b_{n+1} = \overset{-6}{b_1} + 9(n) = -6+9n$$

$$b_n + b_{n+1} = 357$$

$$-6+9n-9+(-6)+9n = 357$$

$$18n-21 = 357$$

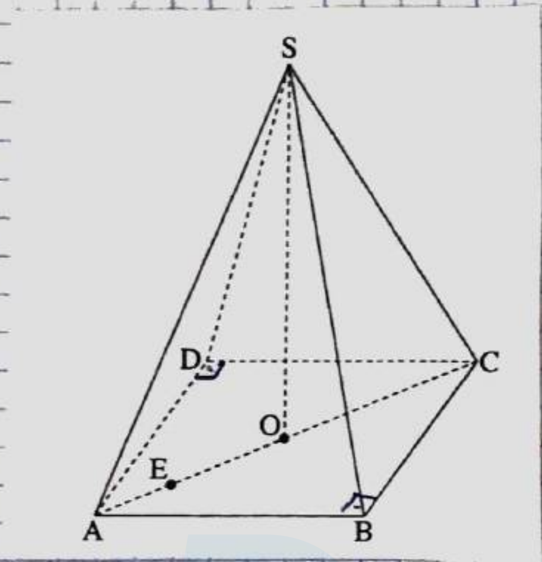
$$18n = 378$$

$$\boxed{n=21}$$

اذاً الحدين المتجاورين اللذان يحققان ان مجموعهما 357

هو الحد الـ21 و الحد الـ22 .

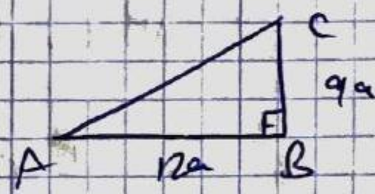
السؤال الثاني :



$AB = 12a \; , \; BC = 9a$

(أ) بما ان القاعدة مستطيل اذاً

حسب فيثاغوروس :



$(12a)^2 + (9a)^2 = AC^2$

$144a^2 + 81a^2 = AC^2$

$\sqrt{225a^2} = \sqrt{AC^2}$

$\boxed{AC = 15a}$

(ب) $EC = 4 \cdot AE$

اي النقطة E تقسم AC بنسبة $4:1$ $(EC:AE)$

الزاوية بين SE والقاعدة هي $\measuredangle SEC = 80^\circ$

O تقسم قطر المستطيل الى قسمين متساويين , من هنا :

$AO = OC = \frac{AC}{2} = 7.5a$

ومعطى ان : $\frac{EC}{4} : \frac{AE}{1}$

نجد EC و AE: نجمع النسب : $4+1=5$.

$\Leftarrow \; \frac{15a}{5} = 3a$

$EC = 4 \cdot 3a = 12a$

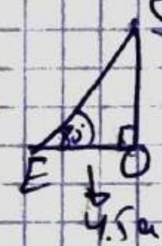
$AE = 1 \cdot 3a = 3a$

من هنا: $AO = AE + EO$

$7.5a = 3a + EO$

$$\boxed{4.5a = EO}$$

في ΔESO :



$$\frac{SO}{EO} = \tan(80°)$$

$$\frac{SO}{4.5a} = \tan(80°)$$

$$\boxed{SO = 25.521 \cdot a}$$

$S_{\Delta SEO} = 130$ وحدات مساحة (م.)

$$130 = S_{\Delta SEO} = \frac{SO \cdot EO}{2} = \frac{(25.521a)(4.5a)}{2}$$

$$57.42225\, a^2 = 130$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{130}{57.42225}}$$

$$\boxed{a = 1.504}$$

حجم الهرم SABC هو:

$$V = \frac{AB \cdot BC \cdot SO}{2 \cdot 3} \qquad \left(\text{* مساحة القاعدة: } \frac{AB \cdot BC}{2}\right)$$

$$V = \frac{9a \cdot 12a \cdot 25.521a}{2 \cdot 3} = \frac{918.756 \cdot a^3}{2}$$

نعوّض $a=1.505$:

$$V=\frac{918.756\cdot(1.505)^3}{2}$$

$$\boxed{V=1565.9}$$ وحدة مكعب

السؤال الثالث :

$f(x) = \sin(2x) + \frac{1}{2}$

(أ) تقاطع مع محور x :

$0 = \sin(2x) + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} = \sin(2x)$

$2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$

$2x = \underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{7\pi}{6}} + 2\pi k$

$x = \frac{7\pi}{12} + \pi k$

$k=0$: $\boxed{x = -\frac{\pi}{12}}$ ✓ ; $\boxed{x = \frac{7\pi}{12}}$ ✗ خارج المجال

$k=1$: $\boxed{x = \frac{11\pi}{12}}$ ✗ خارج المجال ; $\boxed{x = \frac{19\pi}{12}}$ ✗ خارج المجال

$k=-1$: $\boxed{x = -\frac{13\pi}{12}}$ ✗ خارج المجال ; $\boxed{x = -\frac{5\pi}{12}}$ ✓

تقاطع مع محور y :

$f(0) = \sin(0) + \frac{1}{2}$

$f(0) = \frac{1}{2}$

من هنا ، تقاطع $f(x)$ مع المحورين :

$\boxed{\left(0, \frac{1}{2}\right)}$, $\boxed{\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)}$, $\boxed{\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)}$

(ب)

$$f'(x)=\cos(2x)\cdot 2$$

$f'(x)=0$,

$$0=\cos(2x)\cdot 2$$

$$\cos(2x)=0$$

$$/:2 \quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$, $k=0$

$\cancel{x=\frac{3\pi}{4}}$, $k=1$

خارج المجال

$\boxed{x=-\frac{\pi}{4}}$, $k=-1$

$\cancel{x=-\frac{3\pi}{4}}$, $k=-2$

خارج المجال

	$x=-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}$	$x=-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	[illegible]	$-$	0	$+$	0	$-$	[illegible]
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min

$$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\overbrace{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}^{-0.5}\cdot 2=-$$

$$f'(0)=\overbrace{\cos(0)}^{+1}\cdot 2=+$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\overbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{-0.5}\cdot 2=-$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overset{0}{\sin(\pi)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \overset{-1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \overset{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

נק׳ קיצון:

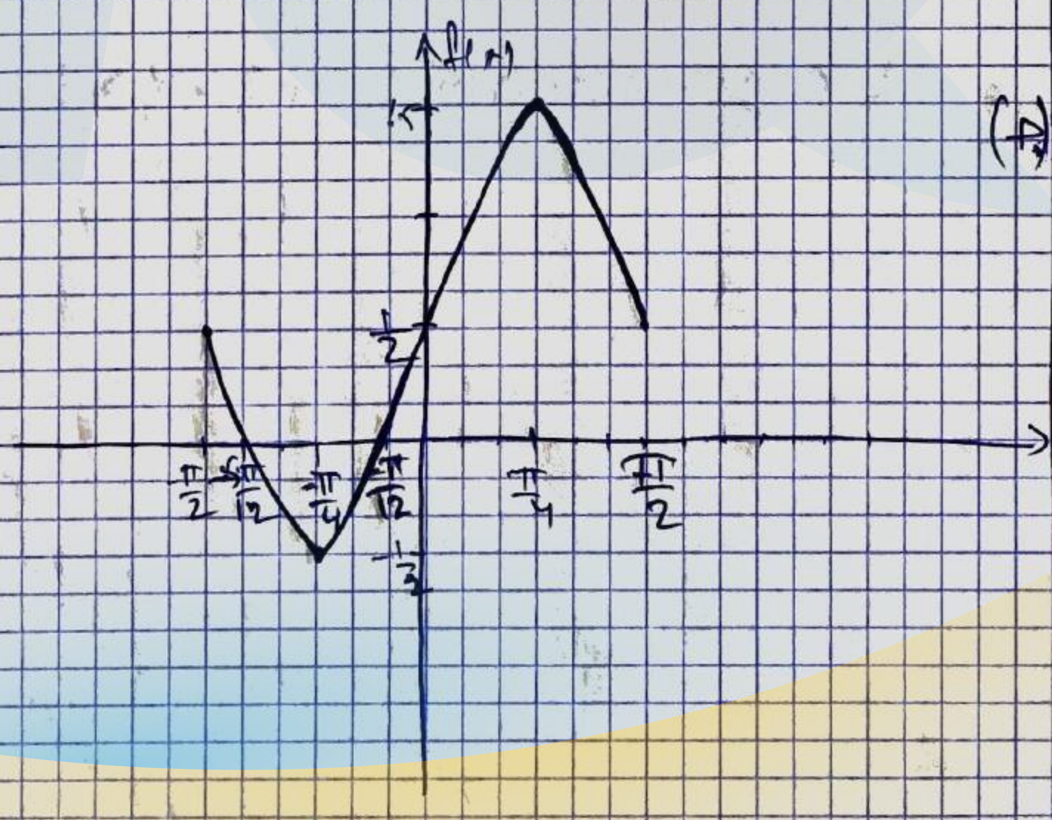
$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ max}}$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ min}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ min}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ max}}$

(ד)



ד) $g(x)=-4\sin(x)\cdot\cos(x)-1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

حسب المطابقة : $\sin(2x)=2\sin(x)\cdot\cos(x)$

اذًا ,

$$g(x)=-2\cdot\underbrace{2\sin(x)\cdot\cos(x)}_{\sin(2x)}-1$$

$$g(x)=-2(\sin(2x))-1$$

$$g(x)=-2\underbrace{\left[\sin(2x)+\tfrac{1}{2}\right]}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x)=-2\cdot f(x)}$$

ه) ① $g'(x)=-2f'(x)$

من هنا : $g'(x)=0$ عندما $f'(x)=0$

اذًا احداثي x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$ هي

نفس احداثيات x للنقاط القصوى للدالة $f(x)$,

$x_1=-\frac{\pi}{2}$ (طرف) $\qquad x_3=\frac{\pi}{4}$

$x_2=-\frac{\pi}{4} \qquad x_4=\frac{\pi}{2}$ (طرف)

$g(-\frac{\pi}{2})=-2\overbrace{f(-\tfrac{\pi}{2})}^{\frac{1}{2}}=-1$

$g(-\frac{\pi}{4})=-2\cdot\overbrace{f(-\tfrac{\pi}{4})}^{-\frac{1}{2}}=1$

$g(\frac{\pi}{4})=-2\overbrace{f(\tfrac{\pi}{4})}^{\frac{3}{2}}=-3$

$g(\frac{\pi}{2})=-2\cdot\overbrace{f(\tfrac{\pi}{2})}^{\frac{1}{2}}=-1$

	$x=-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}$	$x=-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	D?	+	0	−	0	+	D?
$g(x)$	min	↗	max	↘	min	↗	max

$$g'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot \overline{f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)}^{-} = +$$

$$g'(0) = -2\overline{f'(0)}^{+} = -$$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\overline{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{-} = +$$

من هنا احداثيات النقاط القصوى لدالة g(x) :

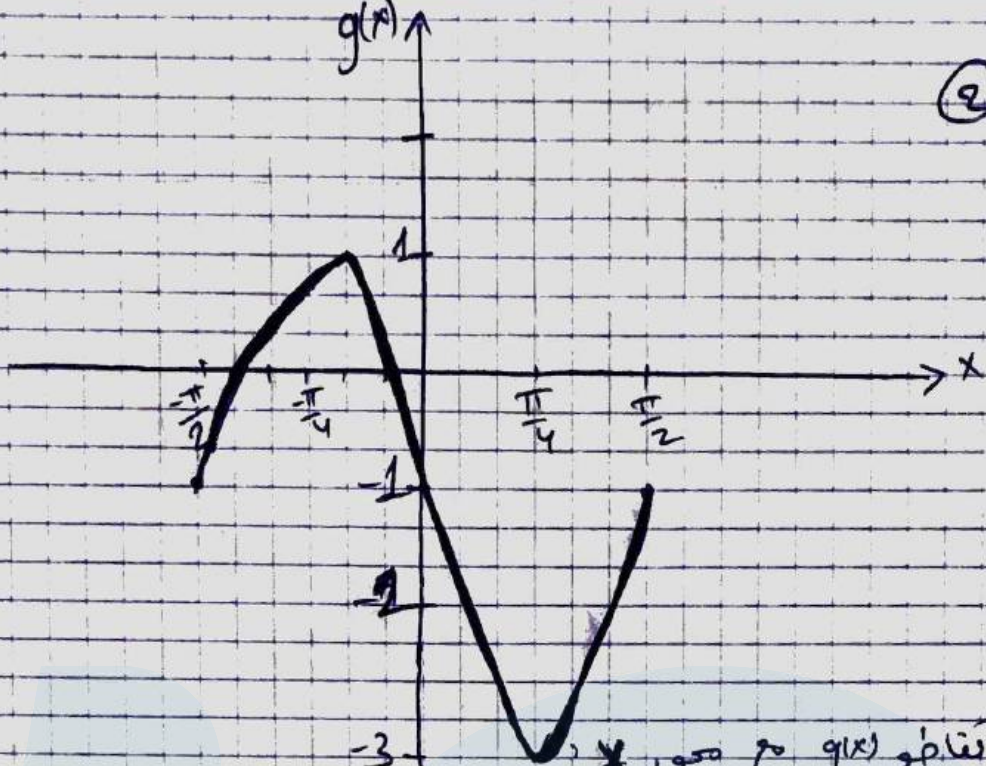
$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \text{ min}}$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right) \text{ max}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, -3\right) \text{ min}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) \text{ max}}$

(ه)



تقاطع $g(x)$ مع محور x:

$0 = -2 \cdot f(x)$

$\Downarrow$

$f(x) = 0$

اذا $\boxed{x = -\frac{\pi}{12}}$ و $\boxed{x = -\frac{5\pi}{12}}$

تقاطع $g(x)$ مع محور y:

$g(0) = -2 \cdot f(0) = -2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{-1}}$

و) عندما تتحقق $K = -1$ فان المستقيم $y = K$ يقطع الدالة $g(x)$ في 3 نقاط وذلك لانه:

$g(-\frac{\pi}{2}) = g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = -1$

اي هنالك 3 نقاط تقع على نفس المستقيم ($y = -1$) في الدالة $g(x)$.

السؤال الرابع :

$$f(x)=\frac{e^{2x}+3}{e^x-1}-7$$

أ) ① $e^x-1\neq 0$

$e^x\neq 1$

$\boxed{x\neq 0}$ مجال تعريف الدالة.

② $f(0)=\frac{\overset{1}{\cancel{e^{2\cdot 0}}}+3-7(e^0-1)}{e^0-1}=\frac{4}{0}$: $\frac{\text{عدد}}{0}$ (مقام مشترك)

اذا خط تقارب عامودي.

$\boxed{x=0}$ خط تقارب عامودي للدالة $f(x)$

ب) $$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x-1)-e^x(e^{2x}+3)}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{3x}-2e^{2x}-e^{3x}-3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{3x}-3e^x-2e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$f'(x)=0$: $0=e^{3x}-3e^x-2e^{2x}$

$0=e^x(e^{2x}-2e^x-3)$

$e^x=0$ لا يوجد حل

$e^{2x}-2e^x-3=0$

נעזר $e^x = T$

$$T^2-2T-3=0$$

$$T_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot(1)(-3)}}{2}=$$

$$\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}\to \boxed{3},\ \boxed{-1}$$

$T=e^x=3$ $\qquad$ $T=e^x=-1$

$\boxed{x_1=\ln(3)}$ $\qquad$ $x_2=\ln(-1)$

$\not\exists$ פס"ל

פס

$$f(\ln(3))=\frac{e^{2\ln(3)}+3}{e^{\ln(3)}-1}-7=\frac{12}{2}-7=-1$$

	$x<0$ (-1)	$x=0$	$0<x<\ln(3)$ (1)	$x=\ln(3)$	$x>\ln(3)$ (2)
$f'(x)$	$-$	~~פסול~~	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	min	↗

$$f'(-1)=\frac{e^{3(-1)}-3e^{-1}-2e^{-2}}{(e^{-1}-1)^2}=\frac{-}{+}=-$$

$$f'(1)=\frac{e^3-3e-2e^2}{(e-1)^2}=\frac{-}{+}=-$$

$$f'(2)=\frac{e^6-3e^2-2e^4}{(e^2-1)^2}=\frac{+}{+}=+$$

من هنا النقطة القصوى للدالة $f(x)$:

$$\boxed{(\ln(3), -1)\ \min}$$

ج) من الجدول السابق :

$\uparrow$: $\boxed{x > \ln(3)}$

$\downarrow$, $\boxed{0 < x < \ln(3)}$ & $\boxed{x < 0}$

د) ① تقاطع مع محور x :

$$0 = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1} - 7$$

$$(e^x-1)/7 = \frac{e^{2x}+3}{e^x-1}$$

$$7(e^x-1) = e^{2x}+3$$

$$7e^x - 7 = e^{2x}+3$$

$$0 = e^{2x} - 7e^x + 10$$

$$0 = T^2 - 7T + 10 \quad , \quad e^x = T$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49-4\cdot 10}}{2}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \to \boxed{5}, \boxed{2}$$

$e^x = 5$, $e^x = 2$

$\boxed{(\ln(5), 0)} \Leftarrow \boxed{x = \ln(5)}$, $\boxed{x = \ln(2)}$

$\boxed{(\ln(2), 0)}$

لا يوجد تقاطع مع محور y لان مجال تعريف الدالة هو $x \neq 0$.

ج) من البنود السابقة وجدنا ان المجال التصاعدي للدالة هو $x > \ln(3)$ و المجال التنازلي $0 < x < \ln(3)$ و $x < 0$

من هنا نلغي رسم II ،

الفرق بين الرسوم I , III و IV هو خط التقارب الافقي. نلاحظ انا هنالك خط تقارب افقي للدالة في $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{e^{\infty}+3}{e^{\infty}-1} - 7 \to \infty$$

من هنا لا يوجد خط تقارب عندما $x \to \infty$.

اذاً الرسم المناسب لرسم الدالة $f(x)$ هو I

هـ) $g'(x) = f(x)$

حسب العلاقة بين الدالة والمشتقة. النقاط الصفرية للمشتقة هنا نقطة قصوى للدالة الاصلية.

من هنا، $g'(x) = f(x) = 0$، وحسب الرسم البياني للدالة $f(x)$ هنالك نقطتين قصوى.

$f(x) = 0$

$\boxed{x = \ln(5)}, \boxed{x = \ln(2)}$

من بنود سابقة.

	$x<0$ (-1)	$x=0$	$0<x<\ln 2$ (0.5)	$x=\ln(2)$	$\ln 2<x<\ln 5$ (1)	$x=\ln(5)$	$x>\ln(5)$ (2)
$g'(x)=f(x)$	$-$	//	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	//	↗	max	↘	min	↗

$g'(-1) = f(-1) = -$

$g'(0.5) = f(0.5) = +$

$g'(1) = f(1) = -$

$g'(2) = f(2) = +$

$\Rightarrow$ $x = \ln 2$ max, $x = \ln 5$ min

السؤال الخامس :-

$$f(x)=\ln(-x^2+4x-3)$$

(أ) ① $-x^2+4x-3>0 \Rightarrow$ ؛ مجال تعريف الدالة

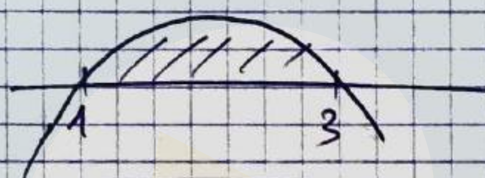
نجد نقاط الصفر؛

$$-x^2+4x-3=0$$

$$\frac{-4\pm\sqrt{16-4(-1)(-3)}}{-2}=$$

$$\frac{-4\pm 2}{-2} \to \boxed{1},\ \boxed{3}$$

بما ان معامل x^2 سالب لذلك رسم الدالة من الصورة كما مبين.



$\boxed{1<x<3}$ مجال تعريف الدالة.

② $f(1)=\ln(-(1)^2+4(1)-3)=$ خط تقارب عامودي.

$f(3)=\ln(-(9)+4\cdot 3-3)=$ خط تقارب عامودي.

اي $\boxed{x=3}$ ، $\boxed{x=1}$ خطوط تقارب عامودية

(ب) $$f'(x)=\frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}$$

$f'(x)=0$:

$$0=-2x+4$$

$$-4=-2x$$

$$\boxed{x=2}$$

$f(2) = \ln(-2^2 + 4\cdot 2 - 3) = \underline{0}$

	$1<x<2$ (1.5)	$x=2$	$2<x<3$ (2.5)
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘

$$f'(1.5) = \frac{-2\cdot(1.5)+4}{-(1.5^2)+4\cdot(1.5)-3} = \frac{1}{0.75} = +$$

$$f'(2.5) = \frac{-2(2.5)+4}{-(2.5^2)+4(2.5)-3} = \frac{-1}{0.75} = -$$

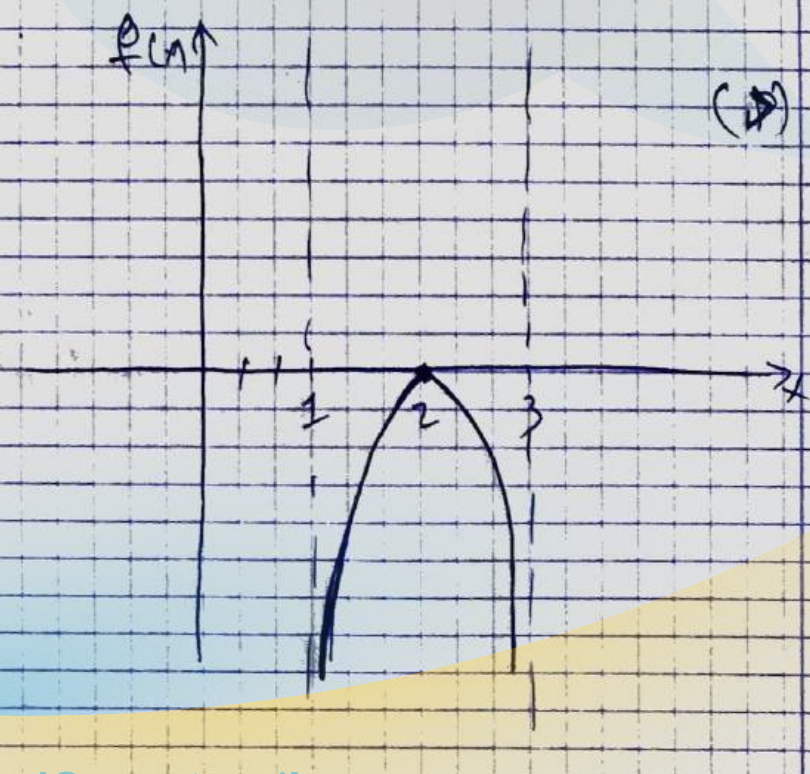
من هنا , النقطة القصوى للدالة : $\boxed{(2,0)\ max}$

(ج) من الجدول السابق ,

المجال التصاعدي للدالة : ↗ : $\boxed{1<x<2}$

المجال التنازلي للدالة : ↘ : $\boxed{2<x<3}$

(د)



(ج) $g(x)=f(x)+b$.

$g(x)$ هي ازاحة عامودية للدالة $f(x)$.

ومن هنا عندما تكون الازاحة الى الاعلى اي $b>0$ اذا الدالة $f(x)$ تقطع محور x بنقطتين

ومن هنا، الادعاء الصحيح هو 2.

(د) $y=-\ln(0.75)$ مماس $g(x)$ في النقطة القصوى.

اي احداثي y للنقطة القصوى لدالة $g(x)$ هو $\frac{3}{4}=0.75$

من هنا وبما ان $g(x)$ هي ازاحة عامودية اذا احداثي x لا يتغير للنقطة القصوى

$$g(2)=f(2)+b$$

$$-\ln\frac{3}{4}=f(2)+b$$

$$\boxed{b=0.2876=-\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

من هنا:

$$g(x)=f(x)-\ln\left(\frac{3}{4}\right)=0$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\ln(-x^2+4x-3)=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$-x^2+4x-3=0.75$$

$$-x^2+4x-3.75=0$$

$$\frac{-4\pm\sqrt{16-4(-1)(-3.75)}}{-2}=$$

$$\frac{-4\pm1}{-2} \rightarrow \boxed{2.5},\ \boxed{1.5}$$

تقاطع $g(x)$ مع محور x $\boxed{(1.5,0)}$ و $\boxed{(2.5,0)}$