حل نموذج بجروت

(803) 382

موعد صيفي خاص

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الأول :-

نفرض سعر 1 كغم من الدقيق هو: X

من هنا، سعر 1 كغم من الجبنة الصفراء هو: $X+50$

- بعد زمن معيّن :

اصبح سعر الجبنة الصفراء : $(X+50)-20\%(X+50)$ (انخفض 20%)

اي اصبح : $\boxed{80\%(X+50)}$

وسعر كغم دقيق اصبح : $X+40\%\cdot X=$ (ارتفع 40%)

اي اصبح : $\boxed{140\%\cdot X}$

(أ) اشترى صاحب المطعم 10 كغم جبنة صفراء اي دفع مقابلهم :

$$10\cdot 80\%(X+50)=\frac{\cancel{10}\cdot \cancel{80}}{\cancel{100}}(X+50)=\boxed{8(X+50)}$$

وايضا اشترى 15 كغم من الدقيق ودفع مقابلهم :

$$15\cdot 140\%\cdot X=\frac{15\cdot 140}{100}\cdot X=\boxed{21X}$$

- دفع صاحب المطعم مبلغاً مقداره 530.5 شيكل اي :

$$21X+8(X+50)=530.5$$

$$21X+8X+400=530.5$$

$$\frac{29X}{29}=\frac{130.5}{29}$$

$$\boxed{X=4.5}$$ شيكل

سعر الدقيق قبل التغيير

$$X+50=4.5+50=\boxed{54.5}$$ شيكل

سعر الجبنة الصفراء قبل التغيير

(ب) 200 غرام من الجبنة هم $\frac{200}{1000}$ كغم اي $\boxed{\frac{2}{10}}$ كغم

400 غرام من الدقيق هم $\frac{400}{1000}$ كغم اي $\boxed{\frac{4}{10}}$ كغم

نجد 10 كغم من الجبنة يكفون لكم بيتسا وكذلك الامر بالنسبة للدقيق:

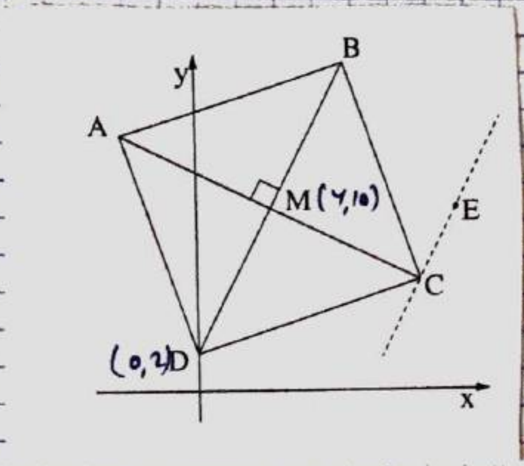
جبنة صفراء: $\frac{10}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{0.2} = \boxed{50}$ بيتسا

الدقيق: $\frac{15}{\frac{4}{10}} = \frac{15}{0.4} = \boxed{37.5}$ بيتسا

بما ان البيتسا مكونة من الدقيق والجبنة الصفراء، والدقيق الذي اشتراه صاحب المطعم يكفي لعدد بيتسا اقل من الجبنة الصفراء.

من هنا يستطيع صاحب المطعم ان ينتج $\boxed{37}$ بيتسا كاملة من المنتجات التي اشتراها.

السؤال الثاني :



$D(0,2)$, $M(4,10)$

(أ) ميل $DM = \frac{y_M-y_D}{x_M-x_D} = \frac{10-2}{4-0}$

$$\boxed{\text{ميل } DM = 2}$$

(ب) $AC \perp DM$ من هنا، ضرب ميول المستقيمات المتعامدة يساوي (-1) اي:

$$\text{ميل } MD \cdot \text{ميل } AC = -1$$

$$2 \cdot \text{ميل } AC = -1$$

$$\boxed{\text{ميل } AC = -\frac{1}{2}}$$

$$y_{AC} = -\frac{x}{2} + b$$

نعوض النقطة $M(4,10)$ التي تقع على AC ونجد معادلة القطر AC:

$$10 = -\frac{4}{2} + b$$

$$12 = b$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{AC} = -\frac{x}{2} + 12}$$

(ج) $E(14,10)$.

(1) ميول المستقيمات المتوازية هي نفسها اي :

ميل MD = ميل المستقيم الموازي الذي يمر عبر النقطة E $= 2$

نعوّض النقطة $E(14,10)$ في معادلة المستقيم الموازي لـ DM ونجد المعادلة الكاملة:

$$E(14,10)\ ,\ y=2x+b$$

$$\Rightarrow\ 10=\overset{28}{\cancel{2}\cdot 14}+b$$

$$b=-18$$

$$\boxed{y=2x-18}$$ معادلة المستقيم الموازي

② EC يتقاطع مع القطر AC في النقطة C : (نساوي المعادلتين لنجد).

$$y_{AC}=y_{EC}$$

$$\frac{-x}{2}+12=2x-18$$

$$x-24=-4x+36$$

$$5x=60$$

$$\boxed{x_C=12}$$

$$y_C=\frac{-12}{2}+12=6$$

منها: $\boxed{C(12,6)}$

د) M هي منتصف القطر AC.

اذا هي منتصف قطعة نجد احداثيات النقطة A:

$C(12,6)$, $M(4,10)$.

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2} \qquad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}$$

$$4=\frac{x_A+12}{2} \qquad 10=\frac{y_A+6}{2}$$

$$8=x_A+12 \qquad 20=y_A+6$$

$$\boxed{x_A=-4} \qquad \boxed{y_A=14}$$

اذا: $\boxed{A(-4,14)}$

(ه) AD ، DC في الشكل $ABCD$ هو مربع.

جد طول AD وطول AC ؛

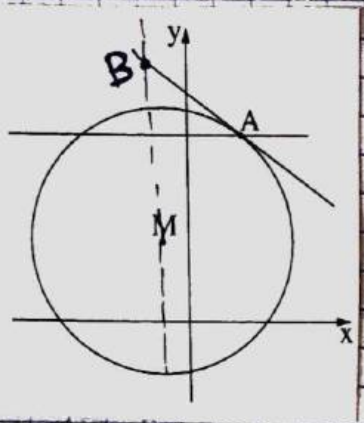
$A(-4,14)$ ، $C(12,6)$ ، $D(0,2)$

• $|AC| = \sqrt{(14-6)^2+(-4-12)^2} = \sqrt{64+256} = \sqrt{320}$

• $|AD| = |DC| = \sqrt{(2-14)^2+(0-(-4))^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$

محيط مثلث ADC $= AD + AC + DC = \sqrt{320} + \sqrt{160} + \sqrt{160} = \boxed{43.19}$ وحدة طول

السؤال الثالث:



$$(x+2)^2+(y-6)^2=100$$

(أ) بما ان النقطة A هي تقاطع مع المستقيم $y=14$ اذا

$$y_A=14$$

نعوض احداثي y في معادلة الدائرة لنجد احداثي x للنقطة A.

$$(x+2)^2+(14-6)^2=100$$

$$x^2+4x+4+64=100$$

$$x^2+4x-32=0$$

$$(x+8)(x-4)=0$$

$$\boxed{x=-8} \qquad \boxed{x=4}$$

بما ان A تقع في الربع الاول اذاً $x_A>0$ اي:

$$x_A=4$$

$$\Rightarrow \boxed{A(4,14)}$$

(ب) $M(-2,6)$ من معادلة الدائرة.

$$\text{ميل } AM = \frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{6-14}{-2-4}=\frac{-8}{-6}=\boxed{1\tfrac{1}{3}}$$

(ج) AM يعامد المماس في النقطة A حسب النظرية: نصف القطر يعامد المماس بنقطة التماس.

اي ضرب الميول (للمماس ضرب AM) يساوي -1.

$$1\tfrac{1}{3}\cdot \text{ميل المماس}=-1$$

$$\boxed{\text{ميل المماس}=-\frac{3}{4}}$$

$$y = \frac{-3}{4}x + b$$

نعوض النقطة $A(4,14)$ في معادلة المماس لنجد b :

$$14 = \frac{-3}{4} \cdot 4 + b$$

$$17 = b$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 17}$$

(د) بما ان المستقيم الذي مرروه يعامد محور x اذا كل النقاط التي تقع على هذا المستقيم لديها نفس احداثي x اي يتحقق :

$$x_M = x_B = -2$$

نعوض $x_B = -2$ في معادلة المماس لنجد y_B.

$$y_B = \frac{-3(-2)}{4} + 17 = 18.5$$

$$\Rightarrow \boxed{B(-2, 18.5)}$$

ثم نجد طول AM و AB :

$$AM = \text{نصف قطر} = \sqrt{100} = 10$$

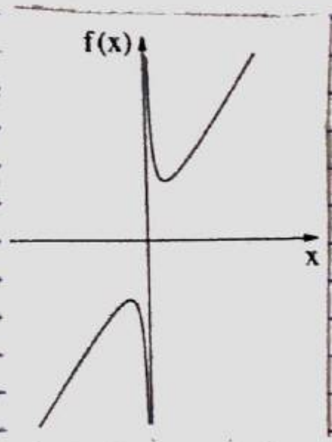
من معادلة الدائرة

$$|AB| = \sqrt{(18.5-14)^2 + (-2-4)^2} \quad : B(-2, 18.5),\ A(4, 14)$$

$$|AB| = \sqrt{20.25 + 36} = \boxed{\sqrt{56.25}}$$

مساحة المثلث ABM $= S_{\triangle ABM} = \frac{AB \cdot AM}{2} = \frac{\sqrt{56.25} \cdot 10}{2} = \boxed{37.5}$ وحدة مساحة

السؤال الرابع :



$$f(x) = 8x + \frac{2}{x}$$

(أ) $\boxed{x \neq 0}$

(ب) $$f'(x) = 8 + \frac{-1 \cdot 2}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = 8 - \frac{2}{x^2}}$$

$f'(x) = 0$

$$0 = 8 - \frac{2}{x^2}$$

$$0 = 8x^2 - 2$$

$$2 = 8x^2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{x = \pm\frac{1}{2}}$$

	$x < -\frac{1}{2}$ (-1)	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$ (-0.25)	$x \neq 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$ (0.25)	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$ (1)
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	MIN	↗

$$f'(-1) = 8 - \frac{2}{(-1)^2} = 8 - 2 = +6$$

$$f'(-0.25) = 8 - \frac{2}{(-0.25)^2} = -24$$

$$f'(0.25) = 8 - \frac{2}{(0.25)^2} = -24$$

$$f'(1) = 8 - \frac{2}{(1)^2} = 6$$

نجد احداثي y للنقاط القصوى:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \overset{-4}{\overline{8\cdot(-\tfrac{1}{2})}} + \frac{2}{-0.5} = -4-4 = \underline{\underline{-8}}$$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \overset{4}{8\cdot\tfrac{1}{2}} + \overset{4}{\frac{2}{0.5}} = 4+4 = \underline{\underline{8}}$$

$\boxed{(\tfrac{1}{2}, 8)\ min}$, $\boxed{(-\tfrac{1}{2}, -8)\ max}$

(ج) ① نعوض في المشتقة $x=1$ ، وجواب المشتقة هو ميل المماس.

$$f'(1) = 8 - \frac{2}{(1)^2} = 8-2 = \underline{\underline{6}}$$

اذاً ميل المماس هو $\boxed{6}$

② $y = ax+b$ ← معادلة المماس العامة.

نجد احداثي y للنقطة التي فيها $x=1$:

$$f(1) = \overset{8}{8\cdot 1} + \overset{2}{\frac{2}{1}} = \underline{10}$$

اذاً النقطة $(1,10)$.

نعوض في معادلة المماس العامة: $(1,10)$, $a=6$:

$$10 = 6\cdot 1 + b$$

$$\underline{\underline{b=4}}$$

من هنا:

معادلة المماس $\boxed{y = 6x+4}$

(د) ① ميل المماس هو قيمة المشتقة في النقطة العظمى
وبالتالي ميل المماس في نقطة نهاية الدالة $f(x)$ العظمى
هو 0 ($f'(x)=0$).

اذا معادلة المماس هي : $y=b$.

b= احداثي y لنقطة النهاية العظمى لان المماس يمر فيها

اذا معادلة المماس :

$$\boxed{y=-8}$$

② $y_I=-8$, $y_{II}=6x+4$

نساوي المعادلتين ونجد x :

$$6x+4=-8$$

$$6x=-12 \quad /:6$$

$$\boxed{x=-2}$$

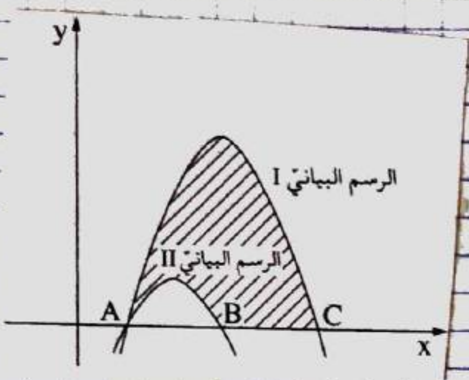
نعوض $x=-2$ في معادلة المماس II :

$$y_{II}=6\overset{-12}{(-2)}+4$$

$$y=-8$$

اذا نقطة التقاطع هي $\boxed{(-2,-8)}$

السؤال الخامس :



$$f(x) = -x^2+8x-12$$
$$g(x) = -x^2+12x-20$$

$(f)B, C$ و تقاطع الدالة مع محور x.

نعوض $f(x)=0$ و $g(x)=0$.

$f(x)$:

$$\cancel{-1}/ \; 0 = -x^2+8x-12$$
$$0 = x^2-8x+12$$
$$\frac{8 \pm \sqrt{64-4\cdot1\cdot12}}{2} =$$
$$\frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} =$$
$$\frac{8 \pm 4}{2} \nearrow \frac{8+4}{2} = \boxed{6} \quad \searrow \frac{8-4}{2} = \boxed{2}$$

$g(x)$:

$$\cancel{-1}/ \; 0 = -x^2+12x-20$$
$$0 = x^2-12x+20$$
$$\frac{12 \pm \sqrt{144-4\cdot1\cdot20}}{2}$$
$$\frac{12 \pm \sqrt{64}}{2}$$
$$\frac{12 \pm 8}{2} \nearrow \frac{12+8}{2} = \boxed{10} \quad \searrow \frac{12-8}{2} = \boxed{2}$$

بما ان A هي نقطة تقاطع الدالتين مع محور x اذاً

$x_A = 2$.

وبما ان $x_C > x_B$ اذاً

$x_C = 10$, $x_B = 6$

ومنها:

$\boxed{C(10,0)}$ $\boxed{B(6,0)}$ $\boxed{A(2,0)}$

(ب) تقاطع الدالة $g(x)$ مع محور x هو:

$(2,0)$ و $(10,0)$

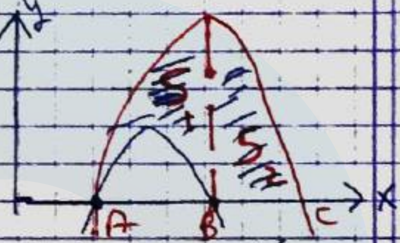
وبما أن النقطة C هي $(10,0)$ وتقع على الرسم البياني I إذاً:

$g(x)$ هي لرسم البياني I

و $f(x)$ هي الرسم البياني II

(ج) المساحة المحصورة بين الرسم البياني I والرسم البياني II هي:

$$\overbrace{\int_{x_A}^{x_B} g(x)-f(x)\,dx}^{S_1}+\overbrace{\int_{x_B}^{x_C} g(x)\,dx}^{S_2}$$



نقسم المساحة الى قسمين وذلك لأن $f(x)$ موجودة فقط في المجال $2\leq x\leq 6$.

نحسب المساحة:

$$\int_2^6\left[\cancel{-x^2}+12x-20-(\cancel{-x^2}+8x-12)\right]dx+\int_6^{10}(-x^2+12x-20)\,dx=$$

$$\int_2^6(4x-8)\,dx+\int_6^{10}(-x^2+12x-20)\,dx=$$

$$\left[2x^2-8x\right]_2^6+\left[\left(\frac{-x^3}{3}\right)+6x^2-20x\right]_6^{10}=$$

$$\left[\left(2(6)^2-8\cdot6\right)-\left(2(2)^2-8\cdot2\right)\right]+\left[\left(\frac{-10^3}{3}+6\cdot10^2-20\cdot10\right)-\left(\frac{-6^3}{3}+6\cdot6^2-20\cdot6\right)\right]=$$

$$(24+8)+\left(66\tfrac{2}{3}-24\right)=\boxed{74\tfrac{2}{3}}$$

وحدة مساحة.

السؤال السادس :

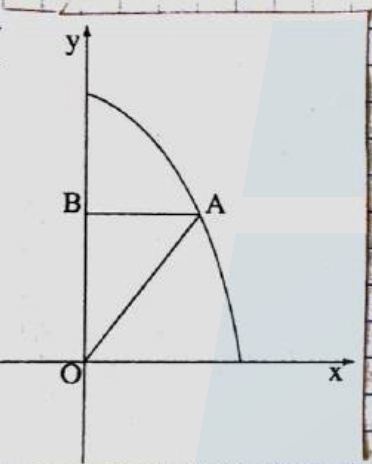
$$y = -x^2 + 48$$

(أ) $y_B = y_A$ ، معطى.

وبما أن A تقع على الدالة اذا نفرض احداثي x للنقطة A هو t. $X_A = t$ ، نعوضه في الدالة ونجد احداثي y للنقطة A بدلالة t:

$$\boxed{y_A = -t^2 + 48}$$

$$y_A = y_B = -t^2 + 48 .$$



من هنا:

$$A(t, -t^2+48) , \quad B(0, -t^2+48) .$$

مساحة المثلث AOB هي: $\frac{AB \cdot BO}{2}$

طول $AB = X_A - X_B = t - 0 = t$

طول $BO = Y_B - Y_O = (-t^2+48) - 0 = -t^2+48$

نعرف دالة جديدة $g(t)$ والتي هي عبارة عن مساحة ΔABO:

$$g(t) = S_{\Delta ABO} = \frac{AB \cdot BO}{2} = \frac{t(-t^2+48)}{2} = \boxed{\frac{-t^3+48t}{2}}$$

نجد المشتقة ونساويها للصفر لنجد t (النقطة العظمى للدالة، والتي تعطينا الـ t الذي نحصل بواسطته على أكبر مساحة للمثلث).

$$g'(t) = \frac{-3t^2+48}{2}$$

$g'(t) = 0$:

$$\cdot 2 / \; 0 = \frac{-3t^2+48}{2}$$

$$-3t^2+48=0$$

$$\cancel{3}t^2=48$$

$$\sqrt{t^2}=\sqrt{16}$$

$$t=\pm 4$$

وبما ان t يعبر عن طول ضلع اذا بالضرورة هو عدد موجب

اذا $\underline{t=4}$.

نتأكد ان $t=4$ يعطينا اكبر مساحة ممكنة (نقطة max للدالة $g(t)$)

	0		5
	$t<4$	$t=4$	$t>4$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	max	↘

$$g'(0)=\frac{-3\cdot 0^2+48}{2}=+$$

$$g'(5)=\frac{-3\cdot 25+48}{2}=-$$

من هنا، عندما $\boxed{t=4}$ اي احداثي x للنقطة A هو 4 اذا نحصل على اكبر مساحة للمثلث ABO .

ب) نعوض في $g(t)$, $t=4$ لنجد اكبر مساحة (الدالة عبارة عن مساحة المثلث)

$$g(4)=\frac{-(4)^3+84\cdot 4}{2}=\boxed{64}$$

وحدة مساحة .