حل نموذج بجروت

(807) 582

موعد شتاء مُتأخر

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

أ. بحسب المعطيات $y^2=4px$ القطع المكافئ.

K نقطة على القطع المكافئ بحيث $K(x_k,12)$.

البعد بين النقطة K وبؤرة القطع المكافئ هو 20.

بما أن $y^2=4px$ ان $y=2\cdot(2p)x$

وبالتالي احداثيات بؤرة القطع المكافئ هي $\boxed{(p,0)} \leftarrow (\frac{2p}{2},0)$

نجد الاحداثي x_k:

$$12^2=4px_k \to \frac{144}{4p}=x_k$$

$$K:\left(\frac{36}{p},12\right) \Leftarrow \boxed{\frac{36}{p}=x_k}$$

البعد بين K والبؤرة هو 20 لذلك يتحقق:

$$\sqrt{\left(p-\frac{36}{p}\right)^2+12^2}=20 \xRightarrow{(\;)^2} \left(\frac{p^2-36}{p}\right)^2+144=400$$

$$\left(\frac{p^2-36}{p}\right)^2=256 \xRightarrow{+\sqrt{}} \frac{p^2-36}{p}=16$$

p>0 لذلك نأخذ الجذر الموجب فقط

$$\Rightarrow p^2-36=16p \Rightarrow p^2-16p-36=0$$

$$\boxed{p_1=2} \qquad \boxed{p_2=18}$$

ب. $p_2=18$ $\quad p_1=2$

I $\quad p_1$: $y^2=4\cdot2x \Rightarrow y^2=8x$

$y=mx$

$(mx)^2=8x \to m^2x^2=8x$

$\to m^2x^2-8x=0 \to x(m^2x-8)=0$

$x=0 \quad m^2x-8=0$

$x=\frac{8}{m^2}$

$x_A=\frac{8}{m^2}$

$y_A=mx_A=m\cdot\frac{8}{m^2}=\frac{8}{m}$

$A\left(\frac{8}{m^2},\frac{8}{m}\right)$

II $\quad y^2=4\cdot18x \to y^2=72x$

$y=mx$

$(mx)^2=72x$

$m^2x^2=72x \to m^2x^2-72x=0$

$x(m^2x-72)=0$

$x=0 \quad m^2x=72 \to x=\frac{72}{m^2} \Rightarrow \boxed{x_B=\frac{72}{m^2}}$

$y_B=mx_B=m\frac{72}{m^2}=\frac{72}{m}$

$B\left(\frac{72}{m^2},\frac{72}{m}\right)$

AB منتصف القطعة M , $y = mx$

$B:\left(\frac{72}{m^2}, \frac{72}{m}\right)$ $A\left(\frac{8}{m^2}, \frac{8}{m}\right)$ $M(x_M, y_M)$

$$x_M = \frac{\frac{8}{m^2} + \frac{72}{m^2}}{2} \Rightarrow x_M = \frac{\frac{80}{m^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_M = \frac{40}{m^2}} \Rightarrow \boxed{m^2 = \frac{40}{x_M}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \sqrt{\frac{40}{x_M}}}$$

$$y_M = \frac{\frac{72}{m} + \frac{8}{m}}{2}$$

$$\boxed{y_M = \frac{40}{m}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{40}{y_M}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{40}{y_m} = \sqrt{\frac{40}{x_m}} = m$$

$$\frac{40}{y_m} = \sqrt{\frac{40}{x_m}} \xrightarrow{(\;)^2} \frac{1600}{y_m^2} = \frac{40}{x_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_m^2 = 40x_m}$$ معادلة المحل الهندسي

اذا المحل الهندسي هو قطع مكافئ

$$\boxed{y^2 = 40x}$$

حل سؤال 2

أ-

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \underline{v}$ $\quad \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

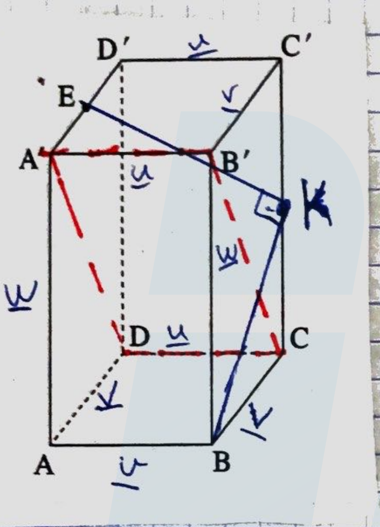
$|\underline{u}| = 3\cdot\sqrt{2}$ $\quad |\underline{v}| = 6$ $\quad |\underline{w}| = 6\cdot\sqrt{2}$

$\overrightarrow{CK} = t\cdot\underline{w}$ $\quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v}$

$\measuredangle EKB = 90$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{KB} = 0$



$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'K}$

$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{u} + (t-1)\cdot\underline{w}$

$\overrightarrow{C'K} = -\overrightarrow{KC'}$

$\overrightarrow{KC'} = (1-t)\cdot\underline{w}$

$\overrightarrow{C'K} = (t-1)\cdot\underline{w}$

$$\boxed{\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\underline{v} + \underline{u} + (t-1)\cdot\underline{w}}$$

$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} = -t\underline{w} - \underline{v} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{KB} = -t\underline{w} - \underline{v}}$

$\overrightarrow{EK}\cdot\overrightarrow{KB} = \left(\frac{1}{2}\underline{v} + \underline{u} + (t-1)\cdot\underline{w}\right)\left(-t\underline{w} - \underline{v}\right) = 0$

.(حيث $\underline{v}\cdot\underline{w}=0$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{v}=0$)

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\underline{v}^2 - t(t-1)\cdot\underline{w}^2 = 0$

$v^2 = |\underline{v}|^2$

$w^2 = |\underline{w}|^2$

$-\frac{1}{2}\cdot 6^2 - t(t-1)\cdot(6\cdot\sqrt{2})^2 = 0$

$-18 - 72(t-1)\cdot t = 0$

$-18 - 72t^2 + 72t = 0 \underset{(:18)}{\Rightarrow} -4t^2 + 4t - 1 = 0$

$\Downarrow \quad t>0$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

ب) 1. المستوى π هو $CDA'B'$ (المستوى المبيّن بالخط الأحمر المتقطع بالرسم)

لكي نبرهن $\overrightarrow{BK}$ يعامد المستوى π يجب نبرهن

ان $\overrightarrow{BK}$ عمودياً على متجهين اللذين يشكلان اساس للمستوى

اي عمودياً على متجهين اللذين يفرشان (فاردلاه م نساه) المستوى.

متجهان اللذان يشكلان اساساً (دو.) للمستوى $CDA'B'$

هما $\overrightarrow{DC}=\underline{u}$ و $\overrightarrow{DA'}$

$$\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA'}=-\underline{v}+\underline{w}=\underline{w}-\underline{v}$$

$$\overrightarrow{DA'}=\underline{w}-\underline{v}$$

اذاً متجهي الاساس للمستوى هما $\boxed{\overrightarrow{DC}=\underline{u}}$ $\boxed{\overrightarrow{DA'}=\underline{w}-\underline{v}}$

نبرهن $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ وأيضاً $\overrightarrow{DA'}\cdot\overrightarrow{BK}=0$. $\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{KB}$

$$\overrightarrow{BK}=-(-t\underline{w}-\underline{v})=t\underline{w}+\underline{v}\implies\boxed{\overrightarrow{BK}=t\underline{w}+\underline{v}}$$

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{DC}=(t\underline{w}+\underline{v})(\underline{u})=t\underbrace{\underline{w}\cdot\underline{u}}_{0}+\underbrace{\underline{v}\cdot\underline{u}}_{0}=0$$

اذاً: $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{DA'}=(\overset{\frac{1}{2}}{t}\underline{w}+\underline{v})\cdot(\underline{w}-\underline{v})=\frac{1}{2}\underline{w}^2+\overset{0}{\underline{v}\cdot\underline{w}}-\frac{1}{2}\overset{0}{\underline{w}\cdot\underline{v}}-\underline{v}^2$$

$\boxed{t=\frac{1}{2}}$

$$\underline{w}^2=|\underline{w}|^2=(6\cdot\sqrt{2})^2=72$$
$$\underline{v}^2=|\underline{v}|^2=6^2=36$$

$$=\frac{1}{2}|\underline{w}|^2-|\underline{v}|^2=\frac{1}{2}\cdot72-36=0$$

اذاً: $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{DA'}$

وبالتالي المتجه $\overrightarrow{BK}$ يعامد متجهين يفرشان المستوى

اي يعامد المستوى كله (كل متجه بالمستوى).

(2.ب) بما ان $\overrightarrow{BK}\perp\overrightarrow{EK}$ و $\pi\perp BK$ لذلك اما

ان يكون $\overrightarrow{EK}$ يقع على المستوى π او موازياً له

وبما ان E لا تقع على π اذاً $\overrightarrow{EK}$ موازي لـ π.

$\underline{w}=(2,2,-8)$ $K:(4,5,-1)$ $B(-1,0,1)$ (P)

معادلة المستوى Π من الصورة:

$ax+by+cz+d=0$

بحيث $\underline{n}=(a,b,c)$ هو متجه يعامد المستوى Π.

وبما ان $\overrightarrow{BK}$ يعامد Π لذلك يمكن اعتبار:

$(a,b,c)=\overrightarrow{BK}$

$$\overrightarrow{BK}=K-B=(4-(-1),5-0,-1-(+1))=(+5,5,-2)$$

اذا $\Pi: 5x+5y-2z+d=0$

بقي علينا إيجاد d. لكي نجد d نحتاج ان نعوض نقطة تقع في Π.

بما أن $\underline{w}=(2,2,-8)$ و $\underline{w}=\overrightarrow{BB'}$ لذلك

$\overrightarrow{BB'}=(2,2,-8)$

نفرض $B'(B'_1,B'_2,B'_3)$ اذا يتحقق

$$\overrightarrow{BB'}=B'-B=(B'_1-(-1),B'_2-0,B'_3-1)=(2,2,-8)$$

$$\Rightarrow (B'_1+1,B'_2,B'_3-1)=(2,2,-8)$$

$$B_1+1=2 \Rightarrow \boxed{B_1=1} \;//\; \boxed{B'_2=2} \;//\; B'_3-1=-8 \quad \boxed{B'_3=-7}$$

$$B'=(1,2,-7)$$

نعوض النقطة في معادلة المستوى ونجد d:

$$\Pi: 5x+5y-2z+d=0$$

$$5\cdot1+5\cdot2-2(-7)+d=0 \Rightarrow \overbrace{5+10+14}^{29}+d=0$$

$$\Rightarrow \boxed{d=-29}$$

إذا معادلة Π:

$$\boxed{\Pi=5x+5y-2z-29=0}$$

حل سؤال 3

$$z^2-(1+i)z+2i+2=0$$

نحل المعادلة بحسب الدستور

$a=1 \quad b=-1(1+i) \quad c=2(i+1)$

$$z_{1,2}=\frac{(1+i)+\sqrt{(1+i)^2(-1)^2-4\cdot1\cdot2(i+1)}}{2\cdot1}=\frac{(1+i)+\sqrt{(1+i)^2-8(1+i)}}{2}$$

$$=\frac{1+i+\sqrt{\cancel{1}+2i\cancel{-1}-8i-8}}{2}=\frac{1+i+\sqrt{-8-6i}}{2}$$

نحسب : $\sqrt{-8-6i}$

نفرض ان $\sqrt{-8-6i}=x+iy$ ← نربع الطرفين :

$$-8-6i=(x+iy)^2 \Longrightarrow -8-6i=x^2+2iyx-y^2$$

$$\Longrightarrow -8-6i=(x^2-y^2)+2ixy$$

השוואת מקדמים
مساواة العوامل $\Longrightarrow \overbrace{-8=x^2-y^2}^{\mathrm{I}} \quad // \quad \overbrace{-6\cancel{i}=2\cancel{i}xy}^{\mathrm{II}} \Longrightarrow -3=xy$

$$\boxed{\frac{-3}{y}=x}$$

نعوض بدل x في I نحصل على

$$-8=\left(\frac{-3}{y}\right)^2-y^2 \Longrightarrow -8=\frac{9}{y^2}-y^2 \xrightarrow[\times y^2]{} -8y^2=9-y^4$$

$$\Longrightarrow y^4-8y-9=0$$

نعوض $y^2=t$ ⟸ $(t>0)$

$$t^2-8y-9=0 \quad \begin{cases} t_1=-1 \quad \times \\ \boxed{t_2=9} \Longrightarrow y^2=9 \quad \begin{cases} \boxed{y_1=3} \\ \boxed{y_2=-3} \end{cases} \end{cases}$$

نجد x :

$$x_1=\frac{-3}{y_1} \longrightarrow x_1=\frac{-3}{3}=-1 \Longrightarrow \boxed{x_1=-1}$$

$$x_2=\frac{-3}{y_2} \longrightarrow x_2=\frac{-3}{-3}=1 \Longrightarrow \boxed{x_2=1}$$

اذاً : $\sqrt{-8-6i}$ له حلين

$\boxed{\text{الاول} = -1+3i}$ // $\boxed{\text{الثاني} = 1-3i}$

نعود لقانون الدستور ونعوض الجذر ونجد الحلول.

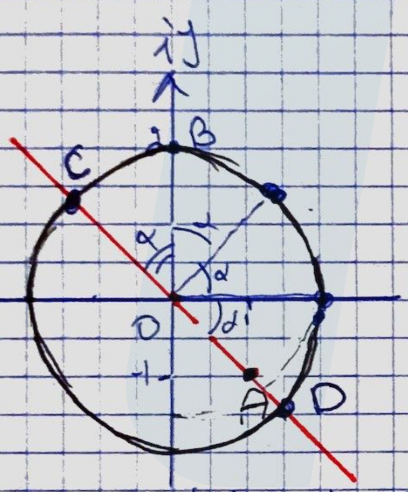
انتبه في حل معادلة تربيعية في الاعداد المركبة لا حاجة لان نأخذ الاشارة ± قبل الجذر لان الحلين الذين سنحصل عليهم هما عددين مركبين متضادين وبالتالي سنحصل على نفس النتائج مع + ومع - ....

$$Z_1 = \frac{1+i+(-1+3i)}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$\boxed{Z_1 = 2i}$$

$$Z_2 = \frac{1+i+(1-3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = \boxed{1-i}$$

$$\boxed{Z_2 = 1-i}$$



ب) A بالربع الرابع لذلك $A = 1-i$

B بالربع الثاني لذلك $B = 2i$

CD هو قطر بالدائرة . C و D هما حلين من الحلول ويقعان على استقامة واحدة اي يصنعان زاوية مقدارها $180°$

وبما ان B, C, D هي رؤوس المضلع المنتظم والزاوية المركزية الناتجة من توصيل O مع كل حل هي الزاوية بين اي رأس والمجاور له فاذا فرضنا ان B و C رأسين متجاورين والزاوية بينهم α لذلك يجب ان نقسم الزاوية المركزية المتبقية $(180-\alpha)$ الى 3 زوايا على الاقل لانه لكي نحصل على زاوية مستقيمة عدد الرؤوس للمضلع يجب ان يكون زوجي وبالتالي يجب ان يكون رأسين اضافيين بين B و D على الاقل وبالتالي اقل عدد من الرؤوس الممكنة هو $4+4=8$ (4 بين C و D من جهة B و 4 من الجهة الاخرى) اي $\boxed{n=8}$ على الاقل

1. بما أنه $n=8$ أي يوجد 8 رؤوس لذلك يتحقق $8\alpha=360$
أي $\boxed{\alpha=45}$. الرأس الأول هو $r\text{cis}45$ وبما أن أحد
الرؤوس هو $B=2i$ أي $r=2$ من هنا أول رأس
هو $2\text{cis}45$ وكل رأس اضافي له نفس ال r ولكن
الزاوية بينه وبين الرأس السابق $45°$ أي نجمع كل مرة $45°$
للزاوية السابقة نحصل على رأس اضافي

I: $2\text{cis}45$ II: $2\text{cis}90$ III: $2\text{cis}135$ IV: $2\text{cis}180$
B

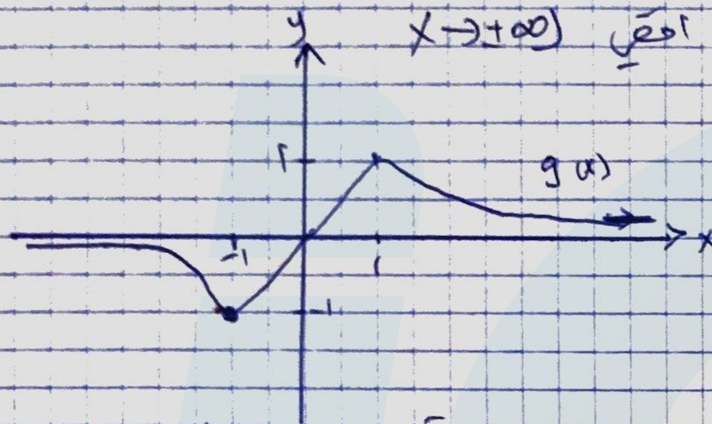
V: $2\text{cis}225$ VI $2\text{cis}270$ VII $2\text{cis}315$ VIII $2\text{cis}360$
$2\text{cis}0$

2. $$z^8=(2\text{cis}0)^8=2^8=256$$

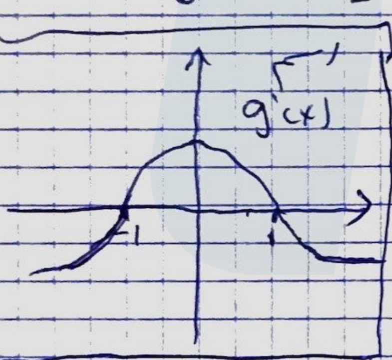
$$\boxed{z^8=256}$$

حل سؤال 4

أ.1) بحسب المعطيات الدالة $g(x)$ معرفة لكل x.
و $g'(x)$ معرفة لكل x. الرسم البياني للدالة $g(x)$ يقطع المحور x
في نقطة واحدة فقط وهي أصل المحاور أي $g(0)=0$
للدالة نقطتان قصويتان $(1,1)$ و $(-1,-1)$ فقط
وفقط في $x=1$ و $x=-1$ يتحقق $g'(x)=0$.
$y=0$ هو خط تقارب أفقي $x\to\pm\infty$



أ.2) المجال الموجب لـ $g'(x)$ هو المجال التصاعدي للدالة g
أي $-1<x<1$
المجال السالب لـ $g'(x)$ هو المجال التنازلي للدالة g
$x<-1$ أو $x>1$



ب. $f(x)=e^{g(x)}-g(x)$

1) الدالة $f(x)$ معرفة لكل x

2) خط التقارب الأفقي:

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) \Rightarrow 0$ ، لذلك $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{0}-0=1$

إذن $y=1$ هو خط التقارب الأفقي للدالة $f(x)$.

3) $f'(x)=g'(x)\cdot e^{g(x)}-g'(x)=0 \Rightarrow g'(x)\left[e^{g(x)}-1\right]=0$

$\Rightarrow g'(x)=0$ أو $e^{g(x)}-1=0 \Rightarrow e^{g(x)}=1 \rightarrow g(x)=0$

$x=1$ ، $x=-1$ | $\boxed{x=-1,0,1 \quad \text{نقاط شك}}$ | فقط $~~x~~=0$

نجد احداثيات النقاط وبحسب الاحداثيات نحدد نوعها

لأن الدالة $g(x)$ و $g'(x)$ و $f(x)$ معرفات لكل x

وبالتالي الدالة $f(x)$ متصلة وبحسب الاحداثي y للنقاط الحرجة

يمكننا تحديد نوعها.

$$f(-1)=e^{g(-1)}-g(-1)$$

$$f(-1)=e^{-1}-(-1)=\frac{1}{e}+1 \Rightarrow \left(-1,1+\frac{1}{e}\right)$$

$$f(0)=e^{g(0)}-g(0)=e^{0}-0=1 \Rightarrow (0,1)$$

$$f(1)=e^{g(1)}-g(1)=e^{1}-1 \Longrightarrow (1,e-1)$$

اذاً: النقاط هي $\left(-1,1+\frac{1}{e}\right)$ // $(0,1)$ // $(1,e-1)$

وبما ان $0<1+\frac{1}{e}$ وأيضاً $0<e-1$

لذلك $\min(0,1)$ و $\max(1,e-1)$ $\max\left(-1,1+\frac{1}{e}\right)$

ملاحظة = طريقة اخرى للحل:

يمكننا تحديد نوع النقاط من خلال اشارة المشتقة الثانية

$$f'(x)=g'(x)\left[e^{g(x)}-1\right]$$

$$f''(x)=g''(x)\left[e^{g(x)}-1\right]+g'(x)\left[g'(x)\cdot e^{g(x)}\right]$$

$$f''(0)=\underbrace{g''(0)\left[e^{g(0)}-1\right]}_{0}+g'(0)\left[g(0)\cdot e^{0}\right]=0+\text{موجب}>0$$

$+\ g\uparrow\ [+\cdot 1]$

g تصاعد

$\boxed{f''(0)>0}$

$\boxed{\min\ x=0}$

$$f''(-1)=g''(-1)\cdot\left[e^{g(-1)}-1\right]+g'(-1)\left[g'(-1)\cdot e^{g(-1)}\right]=-<0$$

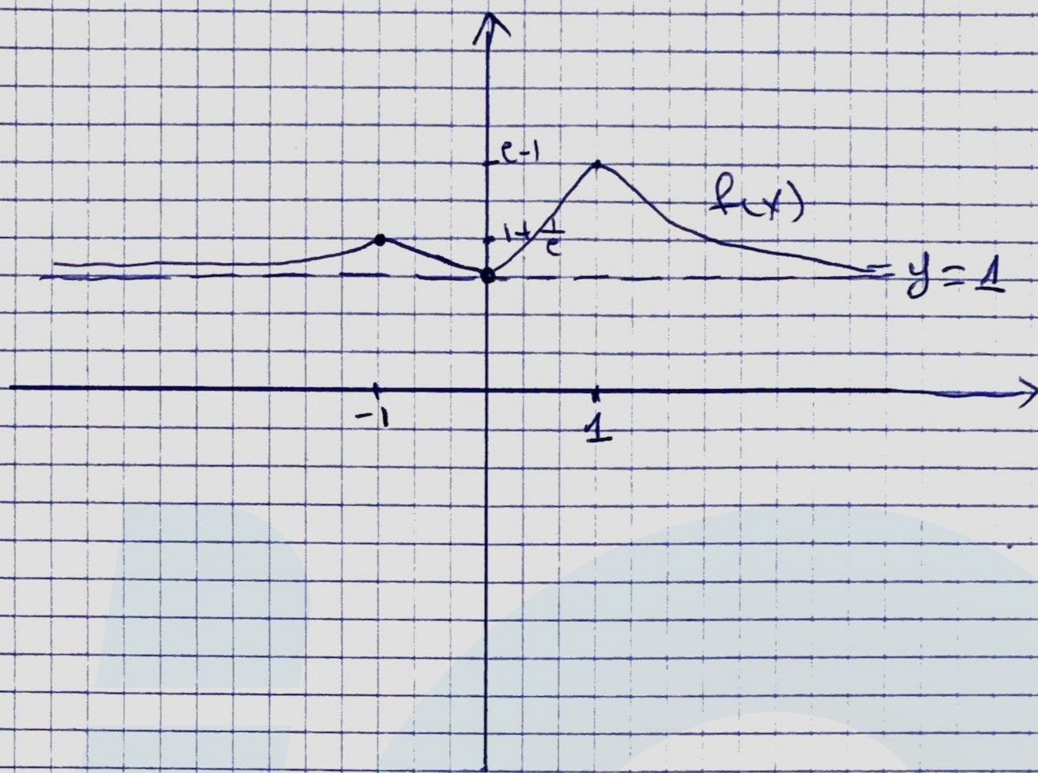
$+\ \underbrace{\left[e^{-1}-1\right]}_{-}\ +\ 0\left[0\cdot e^{-1}\right]$

حسب رسم g' التصاعدي

$\boxed{\text{اذاً}\ x=-1\ \max}$

وبنفس الاسلوب نحصل على $\max\ x=1$

4.ד.



حل سؤال 5

$a\neq 0 \qquad f(x)=ax-\ln\left(\frac{x}{a}\right)$

أ- $a>0$

مجال التعريف $\frac{x}{a}>0 \Leftarrow \boxed{x>0}$

$a<0$

شرط $\frac{x}{a}>0$ / الـ a

$\boxed{x<0}$

اذاً في حال $a>0$ مجال التعريف $x>0$

وفي حال $a<0$ مجال التعريف $x<0$

ب- $f'(x)=0 \leftarrow$

$$f'(x)=a-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{x}{a}}=a-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=a-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow a-\frac{1}{x}=0$$

$$a=\frac{1}{x} \Longrightarrow \boxed{x=\frac{1}{a}}$$

اذا كان $a>0$ اذ $x>0$ و $x=\frac{1}{a}$ نقطة حرجة

اذا كان $a<0$ اذاً $x<0$ و $x=\frac{1}{a}$ نقطة حرجة

نصنف النقاط بواسطة المشتقة الثانية

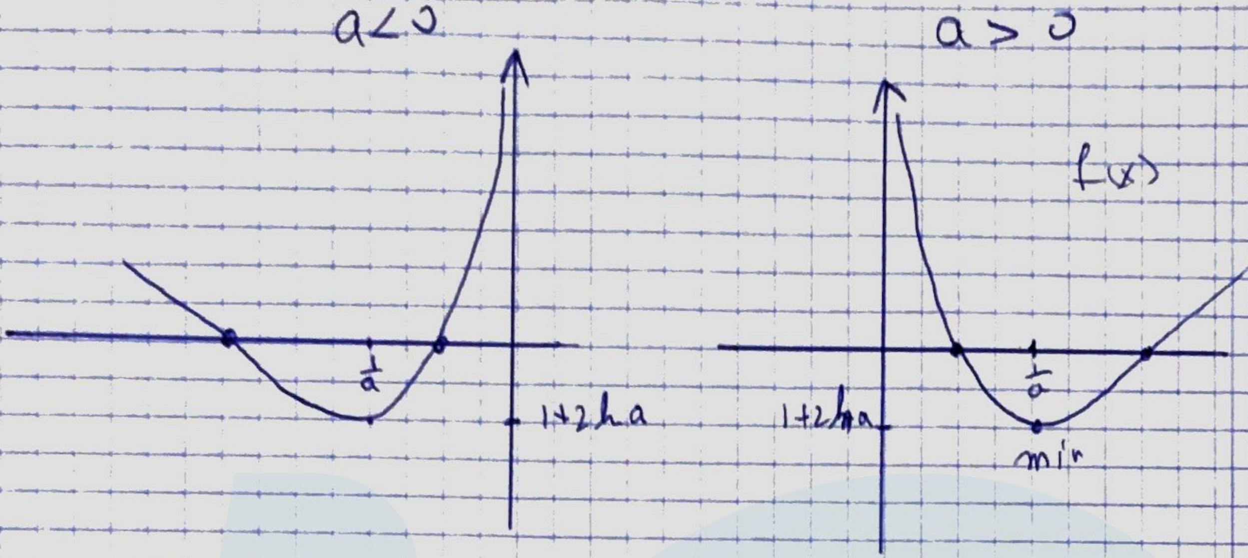
$$f''(x)=+\frac{1}{x^2}>0 \Longrightarrow x=\frac{1}{a}$$

لكل x في مجال التعريف $\min$ في الحالتين $a>0$ // $a<0$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=a\cdot\frac{1}{a}-\ln\left(\frac{\frac{1}{a}}{a}\right)=1-\ln a^2=1-2\ln a$$

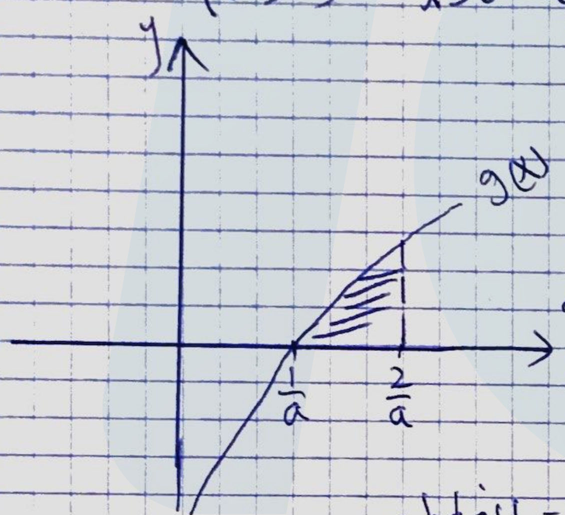
$$\boxed{\min\left(\frac{1}{a},\,1-2\ln a\right)}$$

(ب 4) $f(x)$ تقطع المحور x في نقطتين



د. $g(x)=f'(x)$ $\quad a>0 \quad$ g , f معرفات بنفس المجال

أي $x>0$ $\quad (a>0)$



نرسم رسم تقريبي لـ $f'(x)=g(x)$

حسب رسم f :

* $x=\frac{1}{a}$ نقطة صغرى لـ f
* في $0<x<\frac{1}{a}$ f تنازلية $\Leftarrow$ g (f') سالبة
* في $x>\frac{1}{a}$ f تصاعدية $\Leftarrow$ g (f') موجبة

المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة

$$S=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \underbrace{g(x)}_{f'}\,dx = \Big[f(x)\Big]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} = \Big[ax-\ln\frac{x}{a}\Big]_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}}$$

$$=\left[a\cdot\frac{2}{a}-\ln\left(\frac{\frac{2}{a}}{a}\right)\right]-\left[a\cdot\frac{1}{a}-\ln\left(\frac{\frac{1}{a}}{a}\right)\right]$$

$$=\left[2-\ln\frac{2}{a^2}\right]-\left[1-\ln\frac{1}{a^2}\right]=\left[2-\ln 2-\cancel{\ln a^2}\right]-\left[1-\overset{0}{\ln 1}-\cancel{\ln a^2}\right]$$

$$\boxed{S=1-\ln 2}$$