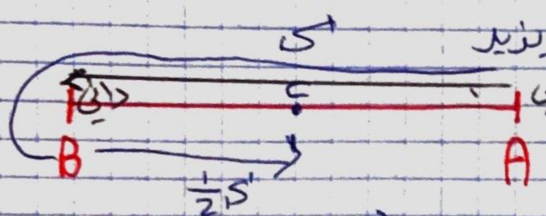
حل نموذج بجروت
(806) 581
موعد شتاء مُتأخر
2021
طاقم الرياضيات
معهد IQ

حل سؤال 1



أ. بحسب المعطيات قطع يزيد المسافة من A الى B وعاد مباشرة" الى A
وعندما وصل إلى النقطة C التي هي منتصف البعد بين A و B كان دالي في النقطة B
نفرض المسافة بين A و B هي S كم
اذا دالي قطع مسافة مقدارها S كم ويزيد قطع $1\frac{1}{2}S$

ويتحقق: بما ان زمن السير متساوي اذاً النسبة بين السرعات هي النسبة بين المسافات المقطوعة
اي يتحقق:

$$\frac{1.5S}{S} = \frac{V_{\text{يزيد}}}{V_{\text{دالي}}}$$

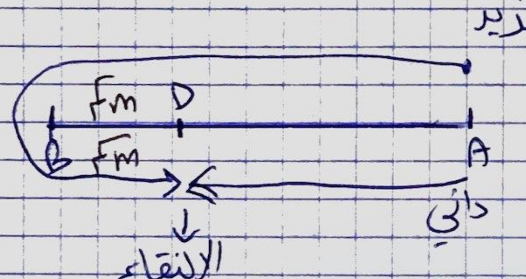
$$\boxed{1.5 = \frac{V_{\text{يزيد}}}{V_{\text{دالي}}}} \Longrightarrow \boxed{V_{\text{يزيد}} = 1.5V_{\text{دالي}}}$$

ملاحظة: يمكن التعبير عن المسار الذي قطعه كل منهما بحسب قانون الحركة الملائم والتوصل لنفس النتيجة:

يزيد: $1.5S = V_{\text{يزيد}} \cdot t$
دالي: $S = V_{\text{دالي}} \cdot t$

$$\xrightarrow[\text{المعادلتين}]{\text{نقسم}} \frac{1.5\cancel{S}}{\cancel{S}} = \frac{V_{\text{يزيد}}\cdot\cancel{t}}{V_{\text{دالي}}\cdot\cancel{t}}$$

$$\boxed{1.5 = \frac{V_{\text{يزيد}}}{V_{\text{دالي}}}}$$



ب. الوضع الموصوف بالبند (ب) هو المبيّن بالرسم
نفرض انهم التقيا بالنقطة D
ونفرض ان النقطة D تبعد عن B بـ m كم
اذاً:

مسافه	ز	س	
$S+m$	$\frac{2}{3}$	$V_{\text{يزيد}}$	يزيد
$S-m$	$\frac{2}{3}$	$V_{\text{دالي}}$	دالي

$S+m = \frac{2}{3}\cdot V_{\text{يزيد}} \Longleftarrow$

$S-m = \frac{2}{3}\cdot V_{\text{دالي}}$

$$\frac{S+m}{S-m} = \frac{V_{\text{يزيد}}}{V_{\text{دالي}}} = 1.5 \longrightarrow S+m = 1.5S - 1.5m \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \boxed{S = 5m}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

$$\boxed{\frac{1}{5}S = m} \leftarrow S = 5m$$

نُعبر عن المسافة التي قطعها داني بدلالة سرعته و كم :

ونحقق:

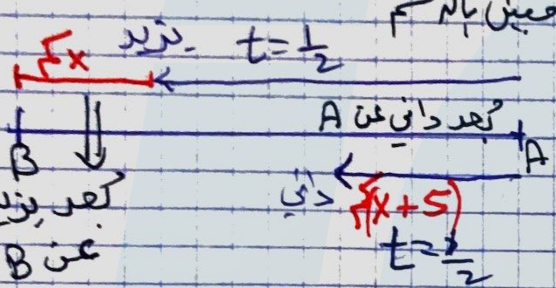
$$S - m = \frac{2}{3}V_{داني}$$

$$S - \frac{1}{5}S = \frac{2}{3}V_{داني}$$

$$\frac{5}{4} / \frac{4}{5}S = \frac{2}{3}V_{داني} / \frac{5}{4} \Rightarrow S = \frac{5}{6}V_{داني}$$

$$\boxed{S = \frac{5}{6}V_{داني}}$$

ج- بحسب المعطيات الوضع الموصوف مبين بالرسم
اي بعد $\frac{1}{2}$ ساعة من بدء السفر



ونحقق :-

يزيد : $S - x = \frac{1}{2} \cdot V_{يزيد}$

داني : $x + 5 = \frac{1}{2}(V_{داني})$

$S = \frac{5}{6}V_{داني}$ // $V_{يزيد} = 1.5\,V_{داني}$

نعوض في المعادلة الاولى نحصل على:

$$S - x = \frac{1}{2}V_{يزيد} \Longrightarrow \frac{5}{6}V_{داني} - x = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}V_{داني}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}V_{داني} - x = \frac{3}{4}V_{داني} \Longrightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)V_{داني} = x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{12}V_{داني} = x}$$

نعوّض هذه النتيجة في المعادلة الثانية (مسافة داني)

$$x + 5 = \frac{1}{2}V_{داني} \Longrightarrow \frac{1}{12}V_{داني} + 5 = \frac{1}{2}V_{داني}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{5}{12}V_{داني} \Longrightarrow \boxed{V_{داني} = 12 \text{ كم/س}}$$

البُعد بين A و B

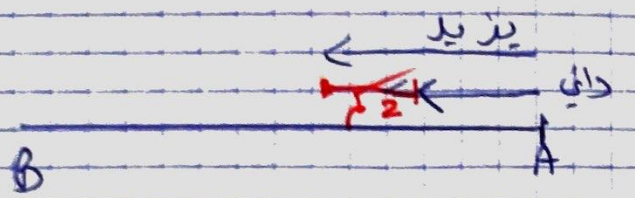
(من بند ب) $S = \frac{5}{6}V_{داني} \Longrightarrow S = \frac{5}{6} \cdot 12 \Longrightarrow \boxed{S = 10 \text{ كم}}$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

د) هنالك 3 إمكانيات للوضع الذي فيه البُعد بين يزيد وداني 2 كم:

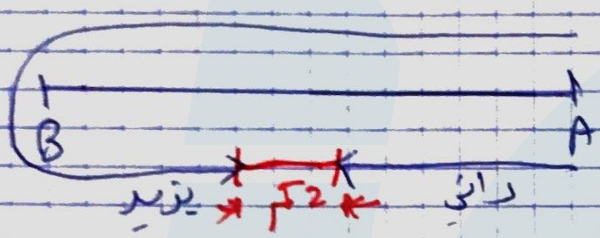
الوضع الأول:

بعد إنطلاقهما معاً



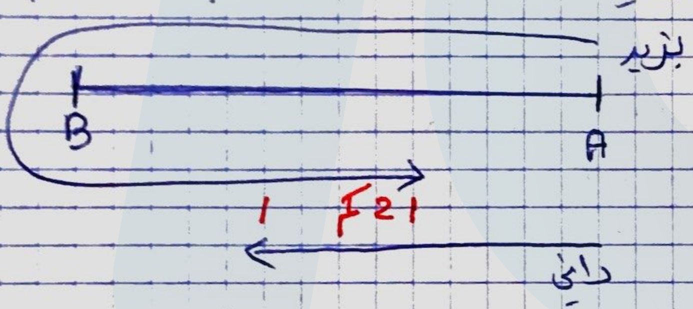
الوضع الثاني

في طريق عودة يزيد من B إلى A وقبل التقائهما



الوضع الثالث

في طريق عودة يزيد من B الى A وبعد ان التقيا:



نجد الزمن للوضع الاول والثاني:

في الوضع الاول يتحقق: $t(18-12)=2 \Leftarrow t=\frac{1}{3}$

اي بعد $\frac{1}{3}$ ساعة من خروجهما يكون البعد بينهم 2كم.

في الوضع الثاني: يزيد وداني قطعا معاً 2كم أقل من مرتين المسافة.

مرتين المسافة هي 20كم // مسافة داني 12t // مسافة يزيد 18t

$18t+12t=20-2 \Longrightarrow 30t=18 \Rightarrow t=\frac{18}{30}\cdot 60=36$

اي بعد 36 دقيقة من خروجهما يكون البعد بينهم 2كم.

• المرة الثالثة تكون بعد ٤٦ دقيقة ....

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 2:

أ) بحسب المعطيات يتحقق:

$$3a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0 \qquad a_1\neq 0$$

بما أن المتوالية هندسية اذاً:

$$3a_1 q^{n+1}+5a_1 q^{n}-2a_1 q^{n-1}=0$$

$$\Rightarrow a_1 q^{n-1}(3q^2-5q-2)=0$$

لا يساوي صفر $\neq 0$

$$3q^2-5q-2=0 \Rightarrow \boxed{q_1=\frac{1}{3}} \quad \boxed{q_2=-2}$$

ب) * المتوالية المتقاربة هي التي أساسها $q_1=\frac{1}{3} \Leftarrow c_1, c_2, \dots$

* المتوالية غير المتقاربة هي التي أساسها $q_2=-2 \Leftarrow b_1, b_2, \dots$

المتوالية b_n هندسية أساسها ($q_b=-2$)

$$b_n=b_1\cdot q_b^{n-1}=b_1\cdot(-2)^{n-1} \Rightarrow b_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}$$

المتوالية c_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ويتحقق:-

$$c_n=c_1\cdot q_c^{n-1} \Rightarrow c_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

نعرّف: $d_n=b_n\cdot c_n$

$$d_n=b_1\cdot(-2)^{n-1}\cdot c_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=b_1\cdot c_1\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{3}\right)^{n-1}=b_1\cdot c_1\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}$$

اذاً: المتوالية d_n قانون الحد العام لها يتحقق:-

$$d_n=b_1\cdot c_1\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}$$

وهذا القانون هو قانون الحد العام لمتوالية هندسية أساسها $\frac{-2}{3}$ والحد الأول فيها هو $d_1=b_1c_1$

وبما ان أساسها $-1<\frac{-2}{3}<1$ اذاً هي متقاربة

ملاحظة: ممكن ايضاً ان نجد d_{n+1} ونبرهن ان $\frac{d_{n+1}}{d_n}=\left(\frac{-2}{3}\right)$

وعندها المتوالية d_n هندسية أساسها $\frac{-2}{3}$

وبالتالي متقاربة.

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

$d_n = c_n \cdot b_n \Rightarrow d_1 = c_1 \cdot b_1 = m \cdot m = m^2$ ج

$\boxed{q_d = -\frac{2}{3}}$ $\boxed{d_1 = m^2}$ إذن

$$S_{d_n} = \frac{d_1}{1-q_d} = \frac{m^2}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{m^2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{m^2}{\frac{5}{3}}$$

$$S_{d_n} = 15 \Rightarrow \frac{m^2}{\frac{5}{3}} = 15 \rightarrow m^2 = \frac{15 \cdot 5}{3} = 25$$

$$m^2 = 25 \rightarrow \boxed{m_1 = 5}, \ \boxed{m_2 = -5}$$

$\boxed{q_b = -2}$ $\boxed{b_1 = -5}$ لذلك (الأصغر) $m = -5$ د

$$S_{b_k} = b_1 \frac{q^{k}-1}{q-1} = 1705$$

$$-5 \cdot \frac{(-2)^k - 1}{-2-1} = 1705 \rightarrow \frac{-5}{-3}\left((-2)^k - 1\right) = 1705$$

$$\Rightarrow (-2)^k - 1 = \frac{1705 \cdot 3}{5} = 1023$$

$$(-2)^k - 1 = 1023 \Rightarrow (-2)^k = 1023 + 1 = 1024$$

$$-2^k = 1024 \Rightarrow (-2)^k = 2^{10} \Rightarrow \boxed{k = 10}$$

$\boxed{1024 = (-2)^{10}}$ بما أن K زوجي لذلك النتيجة موجبة

$$\boxed{K = 10}$$

حل سؤال 3

بحسب المعطيات :- يوجد في الجرة كرات بالالوان أحمر، اصفر وازرق فقط

$\frac{5}{8}$ الكرات بالجرة حمراء اللون وبالتالي الكرات الصفراء والزرقاء تشكل

معاً $\frac{3}{8}$ الكرات بالجرة.

بما أن عدد الكرات الصفراء 3 اضعاف الكرات الزرقاء لذلك

الكرات الزرقاء تشكل $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$ من الكرات بالجرة

والكرات الصفراء تشكل $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{32}$ من الكرات بالجرة

إذاً

$P(\text{اخراج كرة حمراء})=\frac{5}{8}$ // $P(\text{اخراج كرة صفراء})=\frac{9}{32}$

$P(\text{اخراج كرة زرقاء})=\frac{3}{32}$

بحسب المعطيات ايضاً :

* $\frac{4}{5}$ الكرات الحمراء هي خشنة اي $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ الكرات بالجرة خشنة وحمراء ✓

$\frac{8}{9}$ الكرات الصفراء هي خشنة أي $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ الكرات بالجرة خشنة وصفراء ✓

باقي الكرات بالجرة ملساء. وبالتالي يمكن التعبير عن النتائج بواسطة جدول كالتالي :

	ملساء	خشنة	الاحتمال
كرة حمراء	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
كرة صفراء	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$
كرة زرقاء	$\frac{3}{32}$	0	$\frac{3}{32}$
الاحتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

الاحتمال أن تكون 3 كرات بالضبط من أصل 8 خشنة هو:

$$\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=0.023$$

اي الاحتمال لاخراج 3 كرات بالضبط من أصل 8 كرات خشنة

هو: $\boxed{0.023}$

ب- عدد الكرات في الجرة هو 32 :

اذاً عدد الحمراء هو $\frac{5}{8}\cdot 32 = 20$

عدد الحمراء الخشنه هو $\frac{1}{2}\cdot 32 = 16$ و4 كرات حمراء ملساء

عدد الكرات الصفراء هو $\frac{9}{32}\cdot 32 = 9$.

عدد الكرات الصفراء الخشنه هو $\frac{1}{4}\cdot 32 = 8$ وبالتالي كرة صفراء واحدة ملساء

عدد الكرات الزرقاء هو $\frac{3}{32}\cdot 32 = 3$ وكلها ملساء.

عدد الكرات الملساء الكلي هو $\frac{1}{4}\cdot 32 = 8$ (4 حمراء واحدة صفراء و3 زرقاء)

عدد الكرات الخشنة الكلي هو $\frac{3}{4}\cdot 32 = 24$ (16 حمراء 8 صفراء)

$$P\left(\text{كرتين بلونين مختلفين}\right) = 1 - \underbrace{P\left(\text{كرتين صفراء}\right)}_{\frac{20}{32}\cdot\frac{19}{31} = \frac{280}{992}} - \underbrace{P\left(\text{كرتين صفراء}\right)}_{\frac{9}{32}\cdot\frac{8}{31}} - \underbrace{P\left(\text{كرتين زرقاء}\right)}_{\frac{3}{32}\cdot\frac{2}{31}}$$

$$\frac{280}{992} = 0.2822 \qquad \frac{72}{992} = 0.072 \qquad \frac{6}{992} = 0.006$$

$$P\left(\text{كرتين بلونين مختلفين}\right) = 1 - \left[\underbrace{0.2822 + 0.072 + 0.006}_{0.461}\right] = 0.538$$

الاحتمال لاخراج كرتين بلونين مختلفين من الجرة هو $\boxed{0.538}$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

ب.2) الاحتمال المطلوب هو احتمال مشروط

$$P(\text{الاولى حمراء} \mid \text{الكرتين بلون مختلف}) = \frac{P(\text{كرتين بلون مختلف} \cap \text{الاولى حمراء})}{P(\text{الكرتين بلون مختلف})}$$

بحسب البند (ب.1) الاحتمال لكرتين بلون مختلف هو 0.538

نحسب التقاطع:

$$P(\text{كرتين بلون مختلف} \cap \text{الاولى حمراء}) = ?$$

$\Downarrow$

هذا الوضع عبارة عن امكانيتين

I الأولى حمراء والثانية صفراء (أو) II الأولى حمراء والثانية زرقاء

$$\Rightarrow P(\text{اولى حمراء وثانية صفراء}) = \frac{20}{32}\cdot\frac{9}{31} = 0.1814$$

$$P(\text{اولى حمراء والثانية زرقاء}) = \frac{20}{32}\cdot\frac{3}{31} = 0.0604$$

اذاً:

$$P(\text{اولى حمراء} \cap \text{كرتين بلون مختلف}) = 0.1814 + 0.604 = 0.2418$$

وبالتالي:

$$P(\text{اولى حمراء} \mid \text{الكرتين بلون مختلف}) = \frac{0.2418}{0.538} = \boxed{0.4494}$$

ج) بما ان عدد الكرات هو عدد صحيح لذلك n يجب ان يكون عدد بحيث الاحتمال لاخراج كرة حمراء او الاحتمال لاخراج كرة زرقاء او الاحتمال لاخراج كرة صفراء يكون ملائم لعدد كراتها صحيح من كل لون

اي ان n عدد صحيح ويجب ان يتحقق ان:

$\frac{5}{8}n$ عدد صحيح // $\frac{3}{32}n$ عدد صحيح // $\frac{9}{32}n$ عدد صحيح

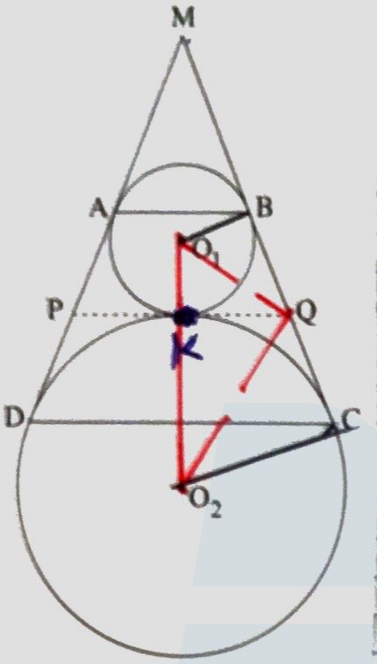
وواضح انه لكي يتم هذا يجب ان يكون n عدد يقسم على 32

وبما ان $50<n<100$ اذاً الامكانيات الملائمة هي:

$\boxed{n=64}$ $(32\cdot 2)$ // $\boxed{n=96}$ $(32\cdot 3)$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 4



أ- (1) $MB=MA$ ، $MC=MD$ طول المماسين للدائرتين من نفس النقطة وحتى نقطة التماس متساوي

$\Downarrow$

(2) $\frac{MB}{MC}=\frac{MA}{MD}$ نقسم المعادلتين

$\measuredangle M$ مشتركة للمثلثين

اذاً:

$\triangle MAB \sim \triangle MDC$ بحسب (ض، ز، ض) نظرية التشابه

(3) $\measuredangle MAB=\measuredangle MDC$ متناظرة في مثلثين متشابهين وهي ايضاً زوايا متناظرة بالنسبة لـ AB و DC بحيث DM قاطع

(4) اذاً ينتج $AB \parallel DC$

(5) $BC=MC-MB=MD-MA=AD$

اذاً $BC=AD$ وهما غير متوازيين (متقاطعان في M)

اذاً بحسب (4) و(5) ABCD هو شبه منحرف متساوي الساقين (وهو المطلوب (أ))

ب) نفرض أن K نقطة تماس الدائرتين اي ان PQ مماس الدائرتين في K

(6) $KQ=QC$ المماس المرسوم من نقطة خارج دائرة وحتى نقطة التماس متساوي.

(7) $KQ=QB$ " " " " " " " " " " "

(8) من (6) و(7) نستنتج أن $QK=QB=QC \Leftarrow \boxed{BC=2QK}$

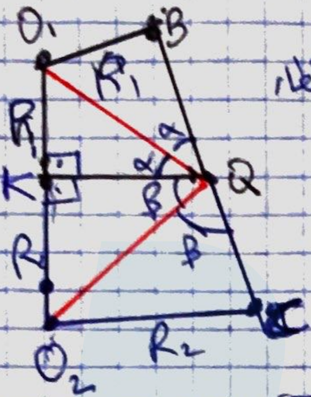
(9) $AD=BC \Leftarrow AD=2QK$

(10) $AP=KP$ وايضاً $KP=PD \Leftarrow AD=\overset{AP+PD}{2KP}$

(11) من دمج 8, 9, 10 نستنتج ان $BC=AD=PQ$

ج. نرسم المستقيمات O_1K و O_1B أنصاف اقطار في الدائرة O_1
ونرسم المستقيمات O_2K و O_2C ״ ״ ״ ״ O_2

وينتج لدينا شكلين رباعيين كل واحد منهما دالتون:



O_1BQK دالتون: $BQ=KQ$ مماسان
$O_1B=O_1K$ انصاف اقطار

O_2CQK دالتون: $QC=QK$ مماسان
$KO_2=O_2C$ انصاف اقطار

QO_1 ينصف $\angle BQK$ القطر الرئيسي في الدالتون ينصف الزوايا التي يصل بينها

QO_2 ينصف $\angle KQC$ القطر الرئيسي في الدالتون ينصف الزوايا التي يصل بينها

اذا يتحقق:

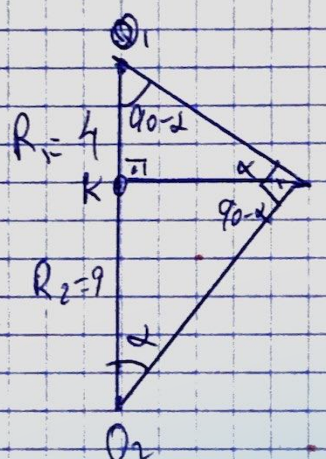
$\angle BQC = 2\alpha+2\beta=180^\circ$ زاوية مستقيمة

$\angle O_1QO_2=\alpha+\beta=\frac{180}{2}=90^\circ$

وهو المطلوب (ج)

د) معطى: $R_1=4$ و $R_2=9$

O_2QO_1 مثلث قائم الزاوية



$\Delta O_1QK \sim \Delta QO_2K$ حسب (ز.ز)

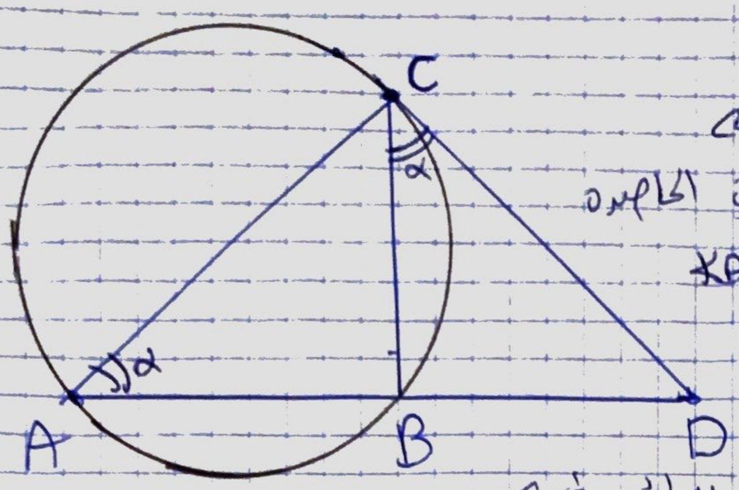
من التشابه ⟵ $\frac{QK}{4}=\frac{9}{QK} \Rightarrow QK^2=36$

$\boxed{QK=6}$

$PQ=2\cdot QK=2\cdot 6=12$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 5



بحسب المعطيات:
مثلث حاد الزاوية ABC
R هو نصف قطر الدائرة الحاصرة
للمثلث ABC . $\measuredangle BAC=\alpha$
D نقطة تقع على
امتداد AB بحيث
المستقيم CD هو مماس للدائرة في C .
نصف قطر الدائرة الحاصرة للمثلث ADC هو 2R .

(أ) $\measuredangle BAC=\measuredangle BCD=\alpha$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر مساوية للزاوية المحيطية المقابلة لنفس الوتر

في ΔABC يتحقق:

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$$

$$\Rightarrow \boxed{BC=2R\cdot\sin\alpha}$$

في المثلث ADC يتحقق:

$$\frac{CD}{\sin\alpha}=2(2R)=4R \Rightarrow \boxed{CD=4R\cdot\sin\alpha}$$

في المثلث ΔBDC بحسب قانون ال cos يتحقق

$$BD^2=DC^2+BC^2-2DC\cdot BC\cdot\cos\alpha$$

$$BD^2=(4R\sin\alpha)^2+(2R\sin\alpha)^2-2(4R\sin\alpha)\cdot(2R\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$$

$$BD^2=16R^2\sin^2\alpha+4R^2\sin^2\alpha-16R^2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$BD^2=20R^2\sin^2\alpha-16R^2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$BD^2=4R^2\sin^2\alpha\,(5-4\cos\alpha)$$

(ب)

$$BD=\sqrt{4R^2\sin^2\alpha\cdot(5-4\cos\alpha)} \Rightarrow \boxed{BD=2R\sin\alpha\cdot\sqrt{5-4\cos\alpha}}$$

وهو المطلوب (ب)

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

ج) معطى أن: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$

$$\frac{DC}{BD} = \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{R\sin\alpha}}{\cancel{2R\sin\alpha}\cdot\sqrt{5-4\cos\alpha}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5-4\cos\alpha}} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \Big/ \frac{4}{3} = \sqrt{5-4\cos\alpha} \Big/ ()^2$$

$$\Rightarrow 5-4\cos\alpha = \frac{16}{9} \Longrightarrow 4\cos\alpha = 5 - \frac{16}{9} = \frac{29}{9}$$

$$4\cos\alpha = \frac{29}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{29}{36} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 36.336}$$

د) معطى: $S_{\triangle CBD} = 27$ $R = ?$

$$S_{\triangle CBD} = \frac{CD\cdot BC}{2}\cdot\sin\alpha = 27$$

$$= \frac{(4R\sin\alpha)(2R\sin\alpha)\cdot\sin\alpha}{2} = 27$$

$$= 8R^2\cdot\sin^3\alpha = 54 \Longrightarrow 8R^2\cdot\sin^3(36.336) = 54$$

$$1.664\,R^2 = 54 \longrightarrow R^2 = 32.448 \longrightarrow R = \sqrt{32.448}$$

$$\boxed{R = 5.696}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 6

$f(x)=\cos^3x\cdot\sin x$ في المجال $0\le x\le\pi$

أ- النقاط القصوى ونوعها:

$f'(x)=3\cos^2x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x+\cos^3x\cdot\cos x$

$f'(x)=-3\cos^2x\cdot\sin^2x+\cos^4x=\cos^2x[\cos^2x-3\sin^2x]$

$$\boxed{f'(x)=\cos^2x[\cos^2x-3\sin^2x]}$$

$f'(x)=0\longrightarrow\cos^2x[\cos^2x-3\sin^2x]=0$

أو

$\cos^2x$ | $\cos^2x-3\sin^2x=0$

$\cos x=0$ | $\cos^2x=3\sin^2x$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ | $\frac{1}{3}=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$

$k=0\to\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ | $\frac{1}{3}=tg^2x$ $\sqrt{\ }$

خارج المجال $k=1\to x=\frac{3\pi}{2}$ X

خارج المجال $k=-1\to x=-\frac{\pi}{2}$ X | $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=tg\,x$

$tg\,x=-\frac{1}{\sqrt3}$ | $\frac{1}{\sqrt3}=tg\,x$

$x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ | $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$

خارج المجال $x_2=-\frac{\pi}{6}$ | $\boxed{x_1=\frac{\pi}{6}}$ $k=0$

$\boxed{x_2=\frac{5\pi}{6}}$ | خارج المجال $x=\frac{7\pi}{6}$ X $k=1$

إذاً في المجال $0<x<\pi$ نقاط الشك هي:

$$\boxed{x=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

نصنف النقاط:

x	0	$0 \le x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < x \le \pi$	π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
	$(0,0)$ min קצה - طرف		max מקומי		פיתול		min מקומי		$(\pi,0)$ max קצה - طرف

$$f'(0) = \cos^2 0\,[\cos^2 0 - 3\sin^2 0] = 1\,[1-0] = 1 > 0$$

$$f(0) = \cos^3 0 \cdot \sin 0 = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\frac{\pi}{3}\cdot\left[\cos^2\frac{\pi}{3} - 3\sin^2\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{3}{4}\right] < 0$$

$$f'\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \cos^2\frac{4\pi}{6}\left[\cos^2\frac{4\pi}{6} - 3\sin^2\frac{4\pi}{6}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{3}{4}\right] < 0$$

$$f'\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos^2\frac{11\pi}{12}\left[\cos^2\frac{11\pi}{12} - 3\sin^2\frac{11\pi}{12}\right] > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^3\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 0$$ التواء $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^3\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

max מקומי $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^3\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3\sqrt{3}}{16}$$

min מקומי $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{-3\sqrt{3}}{16}\right)$

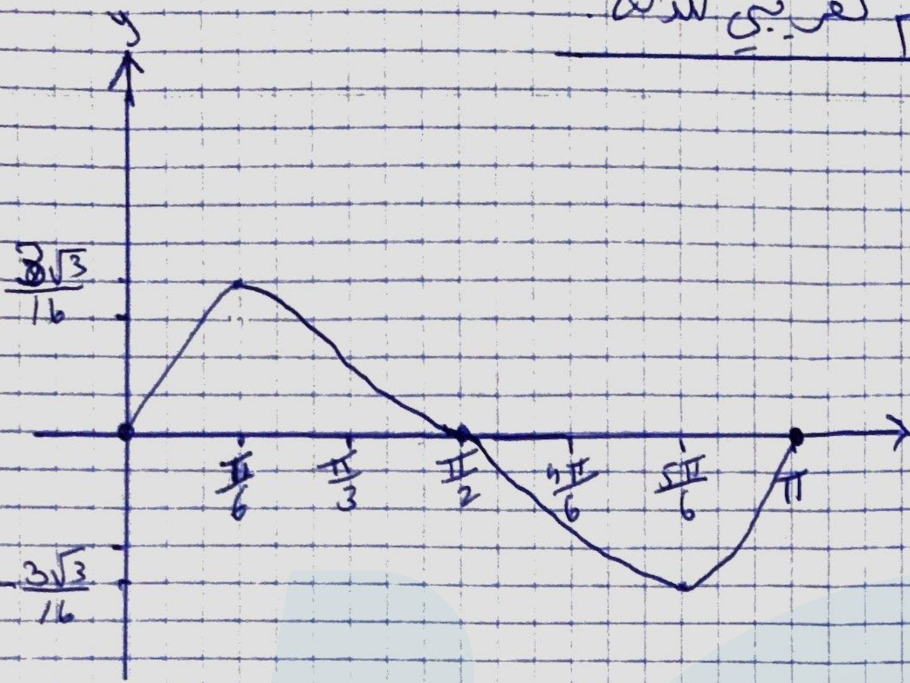
$$f(\pi) = \cos^3\pi\cdot\sin\pi = (0,0)$$

التلخيص:

$(0,0)$ מינימום קצה // $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$ מקסימום מקומי // $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ التواء // $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{-3\sqrt{3}}{16}\right)$ מינימום מקומי

$(\pi, 0)$ מקסימום קצה

ب. نرسم رسم تقريبي للدالة:



ج. $g(x)=a\cdot f(x)$ $\quad a>0$

المماس للدالة g في الصورة $y=mx+n$

m هو ميل المماس في $x=0$ وتحقق:

$m=g'(0) \Rightarrow m=a\cdot f'(0)=a\cdot[\cos^2 0(\cos^2 0-3\sin^2 0)]$

$\Rightarrow m=a[1[1-0]]=a \Rightarrow \boxed{m=a}$

$g(0)=a\cdot f(0)=0$

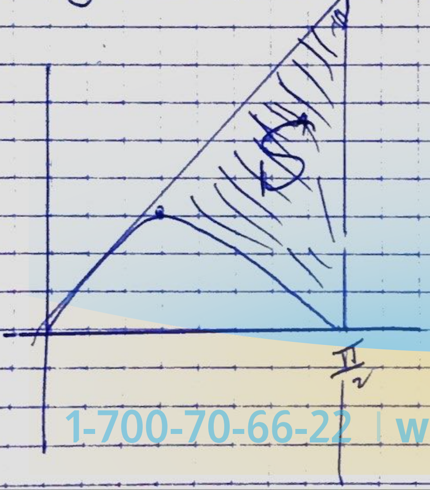
اذاً $m=a$ ونقطة $(0,0)$ على المماس لذلك $\boxed{n=0}$

ومعادلة المماس في $x=0$

$\boxed{y=ax}$

د. بحسب المعطيات المساحة المحصورة بين المماس والدالة $g(x)$

والمساحة في $x=\frac{\pi}{2}$ هي $\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)$



$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ax-af(x)\,dx=\frac{\pi^2}{8}-1$

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ax-[a\cos^3x\cdot\sin x]dx=\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{a\cos^4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}-1$

$k^3(-k^{-1})$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

$$\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{a\cdot\cos^4 x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\frac{a\cdot\cos^4\frac{\pi}{2}}{4}\right)-\left(\frac{a\cdot 0^2}{2}+\frac{a\cdot 1^4}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{a\cdot\pi^2}{8}+\frac{0}{4}\right)-\left(0+\frac{a}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}-1$$

$$\frac{a\pi^2}{8}-\frac{a}{4}=\frac{\pi^2}{2}-1$$

$$a\left(\frac{\pi^2-2}{8}\right)=\frac{\pi^2}{2}-1 \Longrightarrow a(\pi^2-2)=\frac{8\pi^2}{2}-8$$

$$\Longrightarrow a(\pi^2-2)=4\pi^2-8 \Longrightarrow a=\frac{4\pi^2-8}{\pi^2-2}$$

$$\Longrightarrow a=\frac{4\cancel{(\pi^2-2)}}{\cancel{\pi^2-2}} \Longrightarrow \boxed{a=4}$$

حل سؤال 7

$$f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$$

أ. مجال تعريف الدالة $x>0$

ب. $$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)}{(\sqrt{x})^2}=\frac{\frac{2x-(x+a)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x-a}{x\cdot 2\sqrt{x}}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x-a}{x\cdot 2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow x-a=0$$

نق. الشك $\Rightarrow \boxed{x=a}$

اذاً لكي تكون الدالة **بدون** نقاط قصوى يجب أن تكون $a\leq 0$ وعندها تكون النقطة الشاذة $(x=a)$ في المجال غير المعرّف للدالة.

ب.2 للدالة سيكون نقاط قصوى في حالة $a>0$ وعندها بما ان المقام موجب في $x=a$ ستحدد اشارة المشتقة الثانية بحسب اشارة مشتقة البسط في $x=a$.

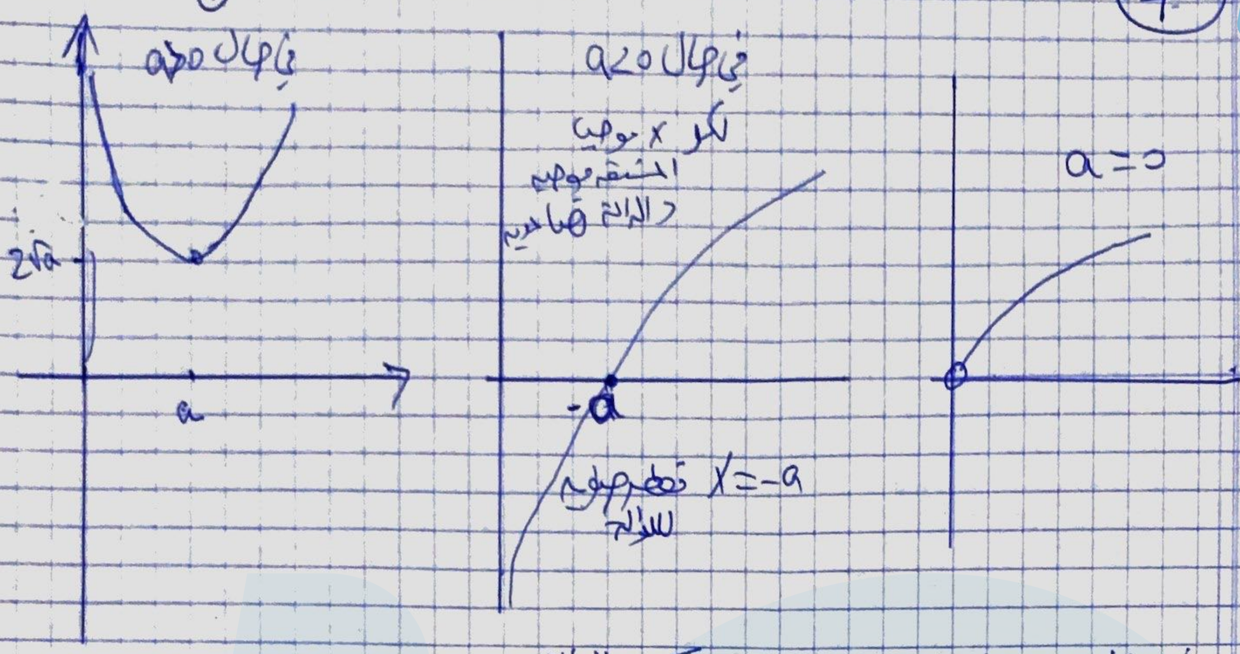
البسط في f' هو $g(x)=x-a$ ومشتقه هي $g'(x)=1$ أي ان البسط مشتقته موجبة دون علاقة لـ a وهذا يعني أن $x=a$ هي نقطة min

واحداثياتها هي $$f(a)=\frac{a+a}{\sqrt{a}}=\frac{2a}{\sqrt{a}}=2\sqrt{a}$$

اذاً: $(a,2\sqrt{a})$ نق. مينيمام للدالة.

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

1 ⓟ



في حال $x=a$ و $a=0$ ستكون الدالة :-
تقف $f(a)=f(0)=\frac{0}{\sqrt{0}} \Rightarrow$

اي المقطع $x=a$ تقف

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x} \Rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$
تقف

ⓓ. $g(x)=f(x)-b$ ومعطى أن الرسم البياني للدالة g يقطع المحور x في نقطتين

الرسم البياني للدالة g عبارة عن ازاحة الى الاعلى او الى الاسفل للدالة f بحسب اشارة g. وبما ان الرسم لـ g يقطع المحور x في نقطتين فبحسب البند ~~ب~~ فإن هذا ممكن فقط في حال كان $\boxed{a>0}$ وبهذه الحالة يجب ان يتحقق:
الازاحة الى الاسفل لكي تقطع الدالة بنقطتين المحور x

2. الازاحة يجب ان تكون الى الأسفل ويجب ان يتحقق:

$b>2\sqrt{a} \Rightarrow$

ملاحظة: ازاحة بمقدار $b=2\sqrt{a}$ ستجعل نقطة النهاية الصغرى نقطة تماس للدالة مع المحور x.

حل سؤال 8

$f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2} \qquad a > 0$

أ.1 مجال التعريف $\quad a - x^2 \geq 0 \quad a \geq x^2$

$\Downarrow$

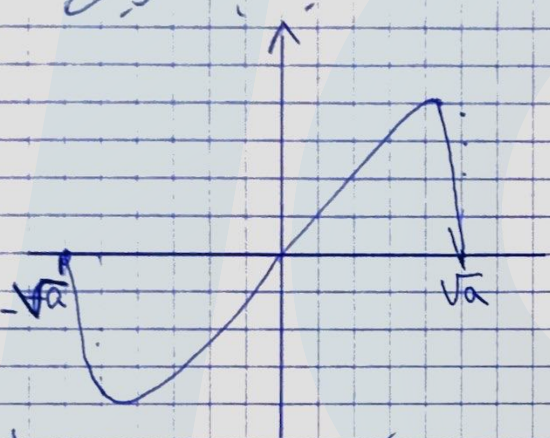
$x \leq \sqrt{a}$ او $x \geq -\sqrt{a}$

اذا مجال التعريف $\boxed{-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}}$

أ.2

$f(-x) = (-x) \cdot \sqrt{a - (-x)^2} = -x \cdot \sqrt{a - x^2} = -f(x)$

إذاً $f(-x) = -f(x)$ لكل x . والدالة فردية في مجال تعريفها.



أ.3 في أطراف مجال التعريف الدالة ستكون قيمتها 0 .

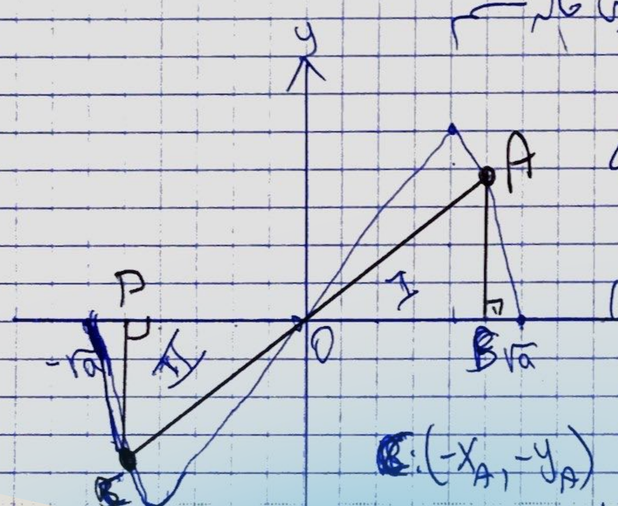
لأنه عندها يتحقق:

$f(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{a - (-\sqrt{a})^2}$

$f(-\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \cdot 0 = 0 = f(\sqrt{a})$

وبما أن الدالة فردية لذلك رسمها البياني متماثل بالنسبة للنقطة $(0,0)$

ب. الوضع الموصوف بالسؤال هو المبين بالرسم



نفرض ان النقطة $A(x_A, y_A)$

اذا بما أن الدالة $f(x)$ فردية

إذاً بعد النقطة A عن $(0,0)$

هو نفس بعد النقطة C عن $(0,0)$

والذي يتحقق $x_C = -x_A$

و $y_C = -y_A$ اي أن $C: (-x_A, -y_A)$

$y_A = f(x_A) = x_A \cdot \sqrt{a - x_A^2}$ وبهذا $y_C = -x_A \cdot \sqrt{a - x_A^2}$

إذاً $A:(X_A, X_A\cdot\sqrt{a-X^2})$ $C:(-X_A, -X_A\cdot\sqrt{a-X_A^2})$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot X_A\cdot\left(X_A\cdot\sqrt{a-X_A^2}\right)$$

المثلثين ΔOAB و ΔODC متطابقين ولذلك لهم نفس المساحة

$$S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OCD} = \frac{1}{2}X_A\left(X_A\cdot\sqrt{a-X_A^2}\right)$$

وبالتالي مساحة المثلثين معاً:

$$g(x) = 2\cdot\frac{1}{2}X_A\left(X_A\cdot\sqrt{a-x^2}\right) = \cancel{X_A}\left(\cancel{X_A}\sqrt{a-X_A^2}\right)$$

$$\boxed{g(x) = X_A^2\cdot\sqrt{a-X_A^2}}$$

$$g'(x) = 2X_A\cdot\sqrt{a-X_A^2} + X_A^2\left(\frac{-\cancel{2}X_A}{\cancel{2}\sqrt{a-X_A^2}}\right)$$

$$g'(x) = \frac{2X_A\cdot\sqrt{a-X_A^2}\cdot\sqrt{a-X_A^2} - X_A^3}{\sqrt{a-X_A^2}}$$

$$g'(x) = \frac{2X_A(a-X_A^2) - X_A^3}{\sqrt{a-X_A^2}} = 0$$

$$2X_A(a-X_A^2) - X_A^3 = 0$$

$$X_A\left(2(a-X_A)-X_A^2\right) = X_A\left(2a-3X_A^2\right) = 0$$

$X_A = 0$ $\quad$ $2a-3X_A^2 = 0$

$X_A > 0$ $\quad$ X $\quad$ $X_A^2 = \frac{2}{3}a$

$$X_A = \sqrt{\frac{2}{3}a}$$

X_A موجب لذلك نأخذ الجذر الموجب فقط.

$$X_A = \sqrt{\frac{2}{3}a}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

نفحص هل النقطة $X_A=\sqrt{\frac{3}{2}a}$ هي نقطة מקסימום.

نفحص بواسطة تعويض النقطة في المشتقة الثانية.

اشارة المشتقة الثانية في النقطة الشاذة تتحدد حسب اشارة مشتقة البسط للمشتقة الاولى. (لأن المقام موجب)

$$\left(g' \text{ البسط في}\right) = 2aX_A-3X_A^3 = X_A\left(2a-3X_A^2\right)$$

$$X_A=\sqrt{\frac{2}{3}a}$$

$$\left(2aX_A-3X_A^3\right)' = 2a-9X_A^2$$

$$X_A=\sqrt{\frac{2}{3}a} \xrightarrow[\text{(نعوض)}]{} 2a-9\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)^2 = 2a-9\cdot\frac{2}{3}a = 2a-6a = \boxed{-4a}$$

إذاً اشارة مشتقة البسط في X_A هي سالبة

لأن $-4a<0$ ($a>0$) وبالتالي $X_A=\sqrt{\frac{2}{3}a}$ نقطة عظمى (מקסימום)

نعوض النقطة في الدالة $g(x)$ ونتحقق

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)=4\sqrt{2} \qquad g(x)=X_A^2\cdot\sqrt{a-X_A^2}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)=\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)^2\cdot\sqrt{a-\left(\sqrt{\frac{2}{3}a}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}a\cdot\sqrt{a-\frac{2}{3}a}=\frac{2}{3}a\cdot\sqrt{\frac{1}{3}a}=4\sqrt{2}$$

$$a\sqrt{\frac{1}{3}a}=6\cdot\sqrt{2} \qquad (\ )^2$$

$$a^2\cdot\frac{1}{3}a=\frac{36\cdot 2}{72} \rightarrow a^3=216$$

$$a=\sqrt[3]{216} \rightarrow \boxed{a=6}$$