حل نموذج بجروت

(804) 482

موعد شتاء مُتأخر

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الاول:

$$a_{n+1} = 2n+1-a_n$$

$$a_1 = 10$$

(أ) نعوّضها في الدستور المعطى.

- a_2 ← $n=1$:

$$a_{\underset{(1+1)}{2}} = 2\cdot1+1-a_1$$

$$a_2 = 3-10 = -7$$

$$\boxed{a_2 = -7}$$

- $n=2$ ، a_3 :

$$a_3 = \overset{4}{2\cdot2}+1-a_2$$

$$a_3 = 5-(-7) = 5+7$$

$$\boxed{a_3 = 12}$$

- $n=3$ ، a_4 :

$$a_4 = \overset{6}{2\cdot3}+1-a_3$$

$$a_4 = 7-12 = -5$$

$$\boxed{a_4 = -5}$$

(ب) ① اذا تحقق ان $a_{n+2}-a_n$ هو عدد حقيقي اذًا المتوالية عندما
يكون n فردي (أي في الحدود الفردية) هي متوالية حسابية

حسب الدستور:

$$a_{n+2}=a_{(n+1)+1}=2(n+1)+1-a_{n+1}$$

$$a_{n+2}=2n+2+1-a_{n+1}$$

$$\boxed{a_{n+2}=2n+3-a_{n+1}}$$

نعوض: $a_{n+1}=2n+1-a_n$.

$$a_{n+2}=2n+3-(2n+1-a_n)$$

$$a_{n+2}=\cancel{2n}+3-\cancel{2n}-1+a_n$$

$$\boxed{a_{n+2}-a_n=2}$$

معنا المتوالية في ~~الأماكن~~ الفردية هي متوالية حسابية فيها $d=2$.

(2) نعم، وذلك لان اذا كان n عدد زوجي اذا يتحقق ايضًا

ان: $a_{n+2}-a_n=2$، بالتالي ايضًا في الحدود (الاماكن) الزوجية

المتوالية هي متوالية حسابية وفرقها: $d=2$

(ج) نقسم الحدود ال 46 الاولى الى قسمين، حدود فردية وزوجية،

نحسب مجموع الحدود الفردية والحدود الزوجية ومن ثم نجمعهم.

نرمز الحدود الفردية (A_n):

$$\left\{\begin{array}{l} \text{عدد الحدود الفردية } n_1=\frac{46}{2}=23 \text{ حد} \\ A_1=10\ (a_1) \\ d=2 \end{array}\right.$$

$$S_{A_{23}}=\frac{n_1(2\cdot A_1+d(n_1-1))}{2}$$

$$S_{A_{23}}=\frac{23}{2}(\overset{20}{2\cdot 10}+\overset{44}{2(23-1)})$$

$$\boxed{S_{A_{23}}=736}$$

نرمز الحدود الزوجية $:B_n$

عدد الحدود الزوجية : $n_2 = \frac{46}{2} = 23$

$B_1 = a_2 = -7$

$d = 2$

$$S_{23} = \frac{n_2}{2}\left(2 \cdot B_1 + d(n_2 - 1)\right)$$

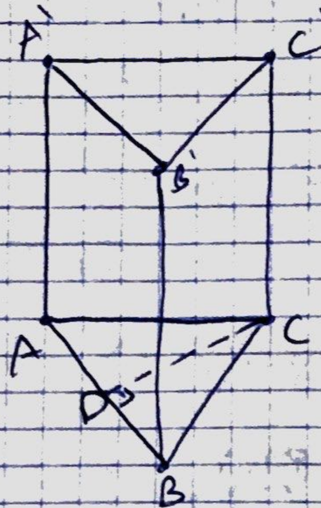
$$S_{23} = \frac{23}{2}\left(\overset{-14}{2 \cdot (-7)} + \overset{44}{2(\overset{22}{23-1})}\right)$$

$$\boxed{S_{23} = 345}$$

مجموع الحدود ال 46 الاولى في المتوالية a_n :

$$S_{a_n} = S_{A_{\frac{n}{2}}} + S_{B_{\frac{n}{2}}} = 736 + 345 = \boxed{1081}$$

السؤال الثاني:

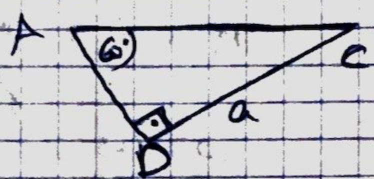


$CD = a$

(أ) بما أن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع.

من هنا: $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 60°$.

$\triangle ADC$:



$$\frac{DC}{AC} = \sin(60°)$$

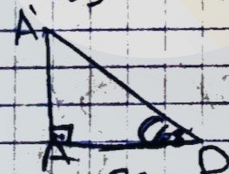
$$\cancel{AC = \frac{2\sqrt{3}}{}} \quad \frac{a}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{AC = \frac{2a}{\sqrt{3}}}$$

(ب) مساحة غلاف المنشور: 713.

$\measuredangle A'DA = 68°$ (وذلك لأن الزاوية المعطاة هي الزاوية بين $A'D$ وكعبها $(AD, A'A)$.

① $\triangle A'AD$:



$A'A$ هو ارتفاع المنشور

$$\frac{A'A}{AD} = \tan(68°) \quad \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$AD = \frac{AB}{2}$ *

$AD = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\frac{A'A}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 2.475$$

$$\cancel{\frac{a}{\sqrt{3}}} \quad \frac{\sqrt{3}A'A}{2a} = 2.475$$

$$\boxed{A'A = 1.428a}$$

② مساحة غلاف المنشور هي : $3\cdot(A'A\cdot AB)$

وذلك لان أوجه المنشور متطابقة (مستطيلات متطابقة).

من هنا :

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}\ 713 = 3\cdot(1.428a)\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$205.825371 = 1.428\,a^2$$

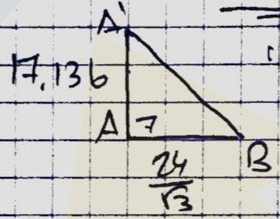
$$144.135 = a^2$$

$$a = 12.005 \cong 12$$

$$\boxed{a = 12}$$

ج) نجد طول BA' :

$\Delta A'AB$:



حسب فيثاغورس:

$$(17.136)^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 = A'B^2$$

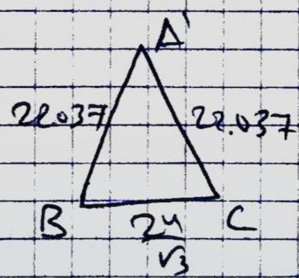
$$A'B^2 = 485.642$$

$$\boxed{A'B = 22.037}$$

ثم نجد طول $A'C$:

بما ان المستطيلات متطابقة اذا : $A'C = A'B$.

$\Delta A'BC$:



حسب قانون cos الموسع :

$$(BC)^2 = (A'B)^2 + (BC)^2 - 2BC\cdot A'B\cdot\cos(\measuredangle BA'C)$$

$$\left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 = (22.037)^2 + (22.037)^2 - 2\cdot(22.037)(22.037)\cdot\cos(\sphericalangle BA'C)$$

$$192 = 971.2587 - 971.258\cdot\cos(\sphericalangle BA'C)$$

$$-779.258 = -971.258\cdot\cos(\sphericalangle BA'C)$$

$$0.8023 = \cos(\sphericalangle BA'C)$$

$$\boxed{\sphericalangle BA'C = 36.6503^\circ}$$

السؤال الثالث:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad f(x) = 2 - 4\cdot(\sin(x))^2$$

أ) ← المطابقة:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = 2(1 - 2\sin^2(x))$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin x$ → $\boxed{f(x) = 2\cdot\cos(2x)}$

ب) تقاطع $f(x)$ مع محور y:

$$f(0) = 2\cdot\overset{1}{\cos(0)} = 2$$

$$\boxed{(0,2)}$$

تقاطع $f(x)$ مع محور $\cancel{x}$ $(y=0)$

$$0 = 2\cdot\cos(2x)$$

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$k=0$:

$$2x = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$k=1$:

$$2x = \frac{3\pi}{2}$$

خارج المجال $\cancel{x = \frac{3\pi}{4}}$

$k=-1$: $2x = -\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{4}}$$

$k=-2$: $2x = -\frac{3\pi}{2}$

خارج $\cancel{x = -\frac{3\pi}{4}}$

تقاطع الدالة مع المحاور:

$\boxed{(\frac{\pi}{4}, 0)}$ $\boxed{(0,2)}$

$\boxed{(-\frac{\pi}{4}, 0)}$

(ד)

$f(x) = 2\cos(2x) \Longrightarrow f'(x) = 2\cdot(-\sin(2x))$

$f'(x)=0$

$0 = -2\sin(2x)$

$\sin(2x) = 0$

$2x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}$

$k=0$: $\boxed{x=0}$

$k=1$, $\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$k=-1$: $\boxed{x=\frac{-\pi}{2}}$

نعوض بـ $f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{(0,2)}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\overbrace{\cos(\pi)}^{-1} = -2 \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-2)}$ min نق'

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\cdot\overbrace{\cos(-\pi)}^{-1} = -2 \Rightarrow \boxed{(\frac{-\pi}{2},-2)}$ min نق'

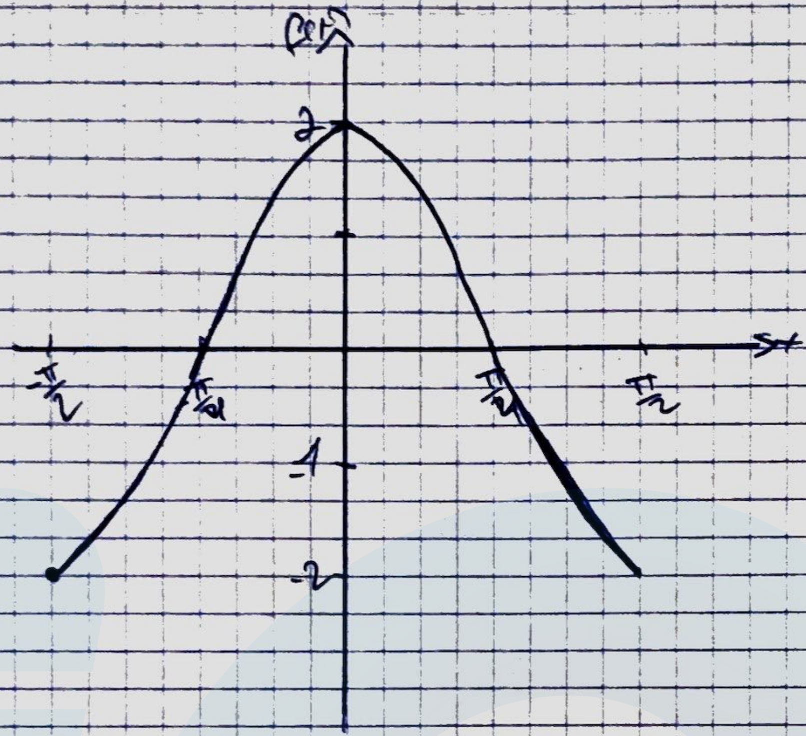
	$x=-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<x<0$ ($-\frac{\pi}{4}$)	$x=0$	$0<x<\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{4}$)	$x=\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	min	↗	max	↘	min

$f'(-\frac{\pi}{4}) = -2\cdot\overbrace{\sin(2\cdot(\frac{-\pi}{4}))}^{-1} = +$

$f'(\frac{\pi}{4}) = -2\cdot\overbrace{\sin(2\frac{\pi}{4})}^{1} = -$

$\boxed{Min\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)}$ $\boxed{Min\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)}$, $\boxed{Max(0, 2)}$

(د



(هـ) ① حسب العلاقة بين المشتقة والدالة :

$f'(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ تصاعدية

$f'(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ تنازلية

$f'(x) = 0 \longrightarrow f(x)$ نقطة قصوى او التواء

من هنا :

$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \; ; \; \underline{f'(x) > 0}$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \; ; \; \underline{f'(x) < 0}$

$x = \frac{\pi}{2}, \; x = \frac{\pi}{2}, \; x = 0 \Leftarrow f'(x) = 0$

II ومن هنا الرسم الملائم لهذه المواصفات هو رسم

② نقسم المساحة لقسمين. القسم الاول: $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$

والقسم الثاني $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

$$S_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = f(0)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{S_1 = 2-(-2) = \underline{4}}$$

$$S_2 = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx = -\left(f(x)\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

بما انه في هذا المجال الدالة موجودة تحت محور x، فالناتج قبلها إشارة ناقصة، اي نضربها بناقص (-1).

$$S_2 = -\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-0\right] = -[-2-2] = \underline{4}$$

$$S_1+S_2 = 4+4 = \boxed{8}$$ المساحة المطلوبة

السؤال الرابع:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+4}{e^{x}}$$

أ) $e^{x}\neq 0$ دائماً

ولذلك لكل x وذلك لان $e^{x}>0$ لكل x.

ب) تقاطع الدالة مع محور y:

$$\boxed{(0,5)} \Leftarrow f(0)=\frac{e^{0}+4}{e^{0}}=\frac{1+4}{1}=5$$

تقاطع الدالة مع محور x:

$$0=e^{2x}+4$$

$$-4=e^{2x}$$

$$2x=\ln(-4)$$

$\varnothing$ لا يوجد تقاطع مع محور ~~x~~

ج) $f(x)=\frac{e^{2x}+4}{e^{x}}$

$$f(x)=\frac{e^{x}\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{x}}}+\frac{4}{e^{x}}$$

$$\boxed{f(x)=e^{x}+4\cdot e^{-x}}$$

د) $f'(x)=e^{x}+4\cdot e^{-x}\cdot(-1)$

$$f'(x)=e^{x}-4\cdot e^{-x}=e^{x}-\frac{4}{e^{x}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}-4}{e^{x}}}$$

$f'(x)=0$

$0=e^{2x}-4$

$4=e^{2x}$

$2x=\ln(4)$

$\boxed{x=\frac{\ln(4)}{2}}$

$f\left(\frac{\ln(4)}{2}\right)=\frac{\overbrace{e^{\frac{2\ln(4)}{2}}}^{4}+4}{e^{\frac{\ln(4)}{2}}}=\frac{8}{2}=4$

	$x<\frac{\ln(4)}{2}$ (0.5)	$x=\frac{\ln(4)}{2}$ (0.693)	$x>\frac{\ln(4)}{2}$ (1)
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

$f'(0.5)=\frac{e^{1}-4}{e^{0.5}}=-0.777$

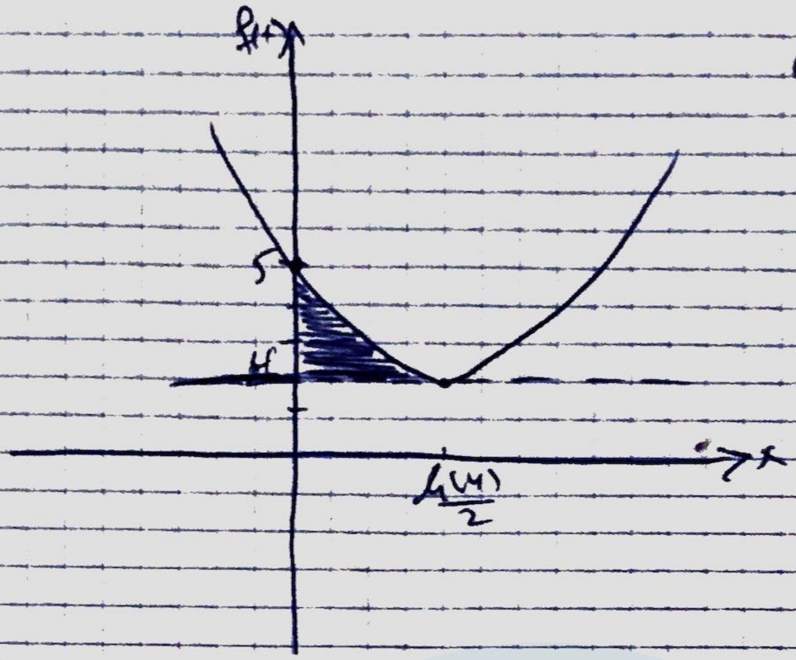
$f'(1)=\frac{e^{2}-4}{e}=1.2$

$\boxed{\min\left(\frac{\ln(4)}{2},4\right)}\leftarrow *$

$\min(\ln 2,4)\leftarrow \ln 4=\ln 2^{2}=2\ln 2\;(*)$

$\frac{\ln 4}{2}=\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2$

(ج)



(و) ميل المستقيم الذي يمس الرسم البياني للدالة $f(x)$ في نقطتها

القصوى هو جواب المشتقة: $f'\left(\frac{\ln(4)}{2}\right) = \underline{\underline{0}}$

من هنا معادلة المستقيم (المماس) هو: $y=4$

المساحة المطلوبة هي المساحة الملونة اعلاه:

$$\int_0^{\frac{\ln(4)}{2}} f(x)\,dx - \int_0^{\frac{\ln(4)}{2}} y=4\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{\ln(4)}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\ln(4)}{2}} e^x + 4e^{-x}\,dx = \underline{\underline{e^x + (-4)\cdot e^{-x}\Big|_0^{\frac{\ln(4)}{2}}}}$$

$$\int_0^{\frac{\ln(4)}{2}} 4\,dx = \underline{\underline{4x\Big|_0^{\frac{\ln(4)}{2}}}}$$

$$\Rightarrow \text{المساحة المطلوبة} = \left[\left(\overset{2}{e^{\frac{\ln(4)}{2}}} - \overset{0.5}{4\cdot e^{-\frac{\ln(4)}{2}}}\right) - \overset{-3}{\left(e^0 - 4e^0\right)}\right] - \left[4\cdot\frac{\ln(4)}{2} - \overset{0}{4\cdot 0}\right] =$$

$$= \left[(\overset{0}{2-2}) + 3\right] - \left[2\ln(4) - 0\right] = \boxed{3 - 2\ln(4)}$$

المساحة المطلوبة

السؤال الخامس :-

$$f(x)=x^2\cdot\ln(x)$$

(أ) $\boxed{x>0}$

(ب) تقاطع الدالة مع محور x : $y=0$:

$$0=x^2\cdot\ln(x)$$

$\boxed{\cancel{x=0}}$ ملغي أو $\ln(x)=0$

$\boxed{x=1}$

$\boxed{(1,0)}$ $\boxed{\cancel{(0,0)}}$ ملغي

(ج) $f'(x)=2x\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot x^2$

$$f'(x)=2x\cdot\ln(x)+x$$

$$\boxed{f'(x)=x[2\ln(x)+1]}$$

$f'(x)=0$:

$$0=x[2\ln(x)+1]$$

$\boxed{\cancel{x=0}}$ ملغي

$$2\ln(x)+1=0$$

$$2\ln(x)=-1$$

$$\ln(x)=-\frac{1}{2}$$

$$x=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

(هـ) $h(x) = f(x) - 2$, $g(x) = -2f(x)$

احداثيات النقطة القصوى لـ $h(x)$ ،

بما أن $h(x)$ عبارة عن ازاحة للدالة بوحدتين في الاتجاه السالب لمحور y ،
اذا احداثي x للنقطة القصوى للدالة $h(x)$ هو ذاته للدالة $f(x)$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) - 2 = \frac{-1}{2e} - 2 = -2.1839$$

وبما أن $h(x)$ هي ازاحة عمودية للدالة $f(x)$ اذا نوع النقطة القصوى
للدالة $h(x)$ هو نفسه للدالة $f(x)$، أي النقطة القصوى للدالة $h(x)$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -2.1839\right) min}$$

احداثيات النقطة القصوى للدالة $g(x)$:

الدالة $g(x)$ عبارة عن ضرب احداثيات y للدالة $f(x)$ بـ -2 . أي
نستنتج من هنا أن الاحداثيات (y) الموجبة تصبح سالبة واحداثيات
(y) السالبة تصبح موجبة ، نستنتج من هنا أن المجالات الموجبة
تصبح سالبة والعكس صحيح أي المجالات التصاعدية تصبح تنازلية
والعكس صحيح.

من هنا ، احداثي x للنقطة القصوى لن يتغير :

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -2f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -2\left(\frac{-1}{2e}\right) = \frac{1}{e}$$

بما أن المجالات التنازلية والتصاعدية انعكسوا اذا النقطة تصبح ~~Max~~ .

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{e}\right) max}$$